

El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de la Integral definida: Una propuesta didáctica

GeoGebra software as a resource for teaching the Defined Integral: a didactic proposal

Guachún Lucero Freddy Patricio²⁷

Rojas Rojas Marco Alejandro²⁸

Rojas Rojas Irma Alicia²⁹

Resumen

El presente trabajo muestra los resultados obtenidos de una propuesta didáctica con los alumnos que toman la asignatura de Matemáticas del tercer año del Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Presidente Jaime Roldós del cantón La Troncal-Ecuador, durante el

²⁷ Universidad de Cuenca. patricio.guachun@ucuenca.edu.ec

²⁸ Universidad de Cuenca. marco.rojasr@ucuenca.edu.ec

²⁹ Unidad Educativa Presidente Jaime Roldós. alicia.rojas@educacion.gob.ec

año lectivo 2020-2021. En esta propuesta se utilizó el software GeoGebra como recurso para la enseñanza del tema de Integrales definidas. La metodología aplicada durante la investigación es cuantitativa con un enfoque descriptivo, las variables de investigación son la motivación que fue medida con una encuesta de percepción y el conocimiento adquirido que se midió mediante una prueba de conocimientos.

Las conclusiones principales señalan que utilizar el software GeoGebra favorece la comprensión de los conceptos de la integral definida en los estudiantes, puesto que les permite visualizar de una mejor manera el proceso realizado, lo que aumenta la motivación por aprender este tema complejo de la matemática. Finalmente, estos resultados demuestran que el Software GeoGebra es una herramienta útil para la enseñanza sobre todo en estos momentos de pandemia donde la educación virtual prevalece en todas las instituciones educativas del país.

Palabras claves: GeoGebra, integral definida, experiencia didáctica, enseñanza.

Abstract

This work shows the results obtained from a didactic experience with the students of Mathematics of the third year of the General Unified Baccalaureate of the President Jaime Roldos Educational Unit of the canton La Troncal-Ecuador, during the 2019-2020 school year. In this experience, the GeoGebra software was used as a resource for teaching the subject of definite integrals. The methodology applied during the research is quantitative with a descriptive approach, the research variables are the motivation that was measured with a perception survey and the knowledge acquired that was measured through a knowledge test.

The main conclusions indicate that using the GeoGebra software favors the understanding of the concepts of the definite integral in students, since it allows them to better visualize the process carried out, which increases the motivation to learn this complex subject of mathematics. These results show that the GeoGebra Software is a useful tool for teaching especially in these moments in which, due to the pandemic caused by Covid, virtual education prevails in all educational institutions in the country.

Keywords: GeoGebra, definite integral, didactic experience, teaching.

Introducción

A inicios del año 2020 el estado ecuatoriano debió realizar múltiples cambios en sus actividades rutinarias, producto de la emergencia ocasionada por el coronavirus (COVID-19), por lo que para detener la propagación del virus se decidió cerrar las instituciones educativas a nivel nacional. Con la necesidad de continuar con los procesos educativos en el país, el 16 de marzo de 2020 la Ministra de Educación, Monserrat Creamer, presenta el Plan Educativo Covid-19 que trae lineamientos para continuar con las actividades educativas. Los cambios en la educación implican suspensión de las modalidades presenciales y dan paso a que los docentes del Sistema Nacional de Educación adopten la modalidad de teletrabajo, donde todas las actividades se realizan mediante medios digitales (Ministerio de Educación del Ecuador, 2020).

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) permiten a los docentes intercambiar, transmitir o receptor información de forma instantánea. Las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje han generado un impacto positivo al romper las barreras temporales y espaciales; permitiendo que la información brindada por los docentes pueda ser utilizada en tiempo real o almacenada para acceder cuando sea requerida, incrementado la posibilidad de acceso a la educación para los estudiantes cuyos horarios no sean compatibles con el docente. Además, las TIC son cada vez más amigables con los usuarios pues ofrecen fácil acceso a medios rápidos de comunicación, plataformas educativas virtuales, software educativos y medios de almacenamiento de información (Castro, Guzmán & Casado, 2007).

Uno de los softwares que frecuentemente se utiliza en la enseñanza de las matemáticas es el GeoGebra, ideal para transformar las prácticas docentes tradicionales en ambientes educativos dinámicos, innovadores, creativos e interesantes, así el docente tendrá cierta ventaja en la presentación de una temática particular, pues el software GeoGebra proporciona una forma de representar, visualizar y organizar los conceptos de estudio. Además, permite a los estudiantes poner en práctica aquellos conceptos que han logrado interiorizar, ofreciendo así una oportunidad diferente de apropiarse del conocimiento (Ruíz, Ávila & Villa, 2013). Utilizar el GeoGebra dentro de las clases de matemáticas resulta útil y práctico, debido a que es un software libre, de fácil instalación y utilización (Guachún & Mora, 2019).

Unos de los aspectos más importantes a la hora de aprender es la motivación de los estudiantes, por lo que los docentes deben estar en la capacidad de innovar permanentemente incorporando herramientas tecnológicas en los procesos educativos que respondan a las exigencias de los educandos. De acuerdo con la investigación de (Barahona, Barrera, Vaca & Hidalgo, 2015), la incorporación del GeoGebra incide positivamente en el rendimiento estudiantil, para ello el docente es quien se encarga de diseñar adecuadamente las actividades académicas que mantengan la motivación y el interés de los estudiantes por aprender.

Experiencia Didáctica

La propuesta didáctica se desarrolló en la asignatura de Matemáticas del tercer año del Bachillerato General Unificado (BGU), en la Unidad Educativa Presidente Jaime Roldós ubicado en el cantón La Troncal-Ecuador. El tema específico de estudio fue la Integral definida, para lo cual, se planificaron 3 clases cronológicas que se pusieron en práctica a través de sesiones en línea.

Clase 1: Introducción al cálculo integral. Suma de Riemann


Utilizando conceptos de geometría se puede calcular el área de todas las figuras de superficies rectilíneas. Pero para hallar el área de superficies curvilíneas es necesario utilizar la Suma de Riemann que es dividir la región en formas rectangulares, luego sumando cada una de estas pequeñas áreas se obtiene una aproximación del área que se busca. El error se puede reducir al dividir la región en un número mayor de particiones.

Se inicia planteando una función cuadrática y se propone a los estudiantes que analicen la forma de encontrar el área comprendida entre la curva de la función, el eje x , y el intervalo inferior (a) y superior (b). Para representar en GeoGebra las sumas de Riemann inferiores y superiores utilizamos lo comandos:

SumaInferior(f(x), a, b, n)

SumaSuperior(f(x), a, b, n)

Los argumentos son: la función $f(x) = \frac{x^2}{8} + 2$, el intervalo (0,5), y el

número de particiones (n) que es un deslizador  que se encuentra en la barra de herramientas. El deslizador nos ayuda a establecer el número de particiones, en esta situación n=10.

Mostrando los dos valores y las dos figuras de manera simultánea conseguimos una buena herramienta para poder explicar estos contenidos.

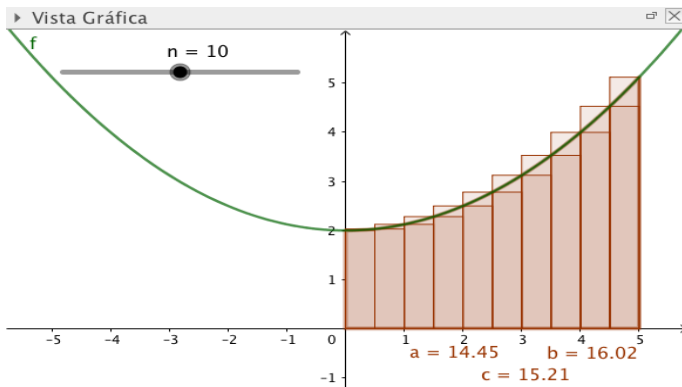


Figura 1. Suma Inferior y Suma Superior

La figura muestra los valores correspondientes al realizar la suma inferior de 14,45 unidades cuadradas y la suma superior de 16,02 unidades cuadradas. Además, se presenta el valor 15,21 unidades cuadradas, que es exacto del área buscada, este valor sirve solo de referencia para realizar las comparaciones. Se observa que los valores de la suma inferior y suma superior faltan y excede al valor del área ideal. Además, al aumentar el número de particiones la suma inferior y suma superior se aproximan más al área exacta.

Finalmente, se plantea a los estudiantes otra situación para que pongan en práctica sus conocimientos adquiridos. Por ejemplo: Dada la función $f(x) = x^2 + 2$ en el intervalo de 1 a 6. Se pide a los estudiantes que representen gráficamente la función utilizando GeoGebra y luego utilizando la suma inferior y superior hallar el área de la región limitada por la función, los intervalos y el eje x, para este caso utilizar el número de particiones $n = 6$. También se pide analizar qué sucede con el valor del área al aumentar el número de particiones a $n = 25$ y $n = 50$.

Clase 2: Integral definida

Luego de conocer la Suma de Riemann que es la dividir el área bajo la curva en n particiones para aproximarse al área exacta. El objetivo de esta clase es que los estudiantes conozcan la forma de encontrar el área exacta de la región limitada por una función.

Como se analizó anteriormente, al aumentar las particiones tanto la suma inferior como la suma superior se aproximan a un valor común, diremos que este valor es la integral definida de la función. Se expresa así:

$$\int_b^a f(x) dx$$

Donde, \int es el símbolo de la integral, a y b los límites de integración. Utilizando el comando de GeoGebra la integral definida queda:

Integral(f(x),a,b)

Debemos recordar cuando la región solicitada se encuentra bajo el eje x toma valores negativos. En estos casos se procede a encontrar por separado el área que se encuentra sobre el eje x , y por otro lado el área que se encuentra bajo el eje x . Por último, sumar las áreas tomando a todas como positivas.

Seguidamente, se solicita a los estudiantes utilizar el GeoGebra para encontrar el área comprendida entre la función $f(x) = x^3 - 4x$, el eje x , en el intervalo de -2 a 2 .

En el desarrollo primeramente se grafica la función. A continuación, se pide a los estudiantes que encuentren por separado el área de arriba y abajo del eje x . Para este nuevo análisis el área de arriba tiene límites de integración de -2 hasta 0 , y el área bajo el eje x tiene de límites de 0 a 2 . Luego se suman las áreas omitiendo el signo negativo.

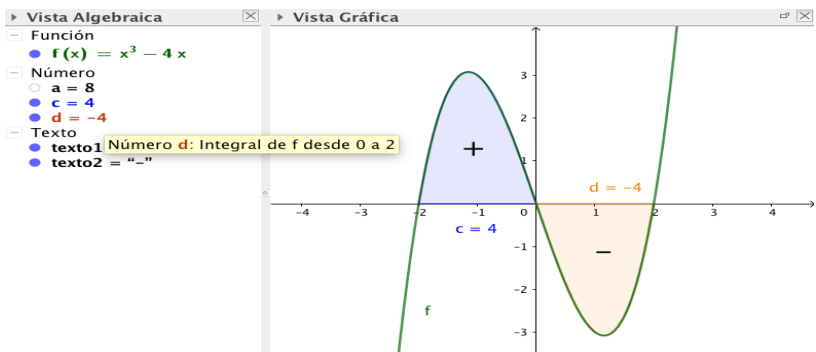


Figura 2. Área limitada por la función y el eje x

Los valores obtenidos del área sobre el eje x es 4 unidades cuadradas y bajo el eje x es de -4 unidades cuadradas, el signo negativo indica que el área está en el eje negativo. Seguidamente, al sumar las dos partes se obtienen 8 unidades cuadradas como resultado de la región comprendida entre la función y el eje x, desde -2 hasta 2.

Como actividad de consolidación de los aprendizajes se plantea a los estudiantes hallar el área comprendida entre la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje x. Se pide a los estudiantes representar gráficamente la función y obtener la región solicitada utilizando GeoGebra. Además, se solicita que indiquen cuántas regiones se forman arriba y abajo del eje x.

Clase 3: Área entre dos funciones

Después de analizar la integral definida entre la función y el eje x, en esta clase, se revisará la forma de encontrar el área comprendida entre dos funciones.

Se plantea a los estudiantes dos funciones $f(x) = x^4 - 1$ y $g(x) = -x^4 + 1$, y se pide que utilicen el programa GeoGebra para hallar el área limitada por las funciones.

Primero se grafican las dos funciones. Seguidamente se hallan los puntos de corte de las dos funciones mediante el comando intersección



que se encuentra en la barra de herramientas; entonces los límites de integración son $a = -1$ y $b = 1$. Luego para encontrar el área comprendida utilizamos el comando:

IntegralEntre(g(x),f(x), a,b)

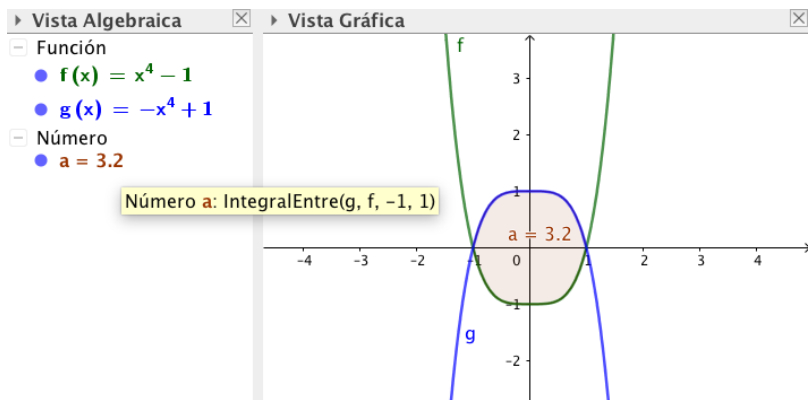


Figura 9. Área entre dos funciones

En la figura se observa que al utilizar el comando `IntegralEntre` se obtiene el área sombreada de 3,2 unidades cuadradas.

Finalmente se plantea a los estudiantes aplicar sus conocimientos para encontrar el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 + 3x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 1$. Para llegar a la solución deberán analizar qué función debe escribirse primero en el comando y encontrar los puntos de corte mediante el comando `intersección`.

Metodología y resultados

La propuesta didáctica se desarrolló con los estudiantes del tercero de BGU que cursan la asignatura de Matemáticas, en la Unidad Educativa Presidente Jaime Roldós durante el año lectivo 2020-2021. La población total fue de 15 estudiantes y se trabajó en el Bloque Curricular 1: Álgebra y Funciones donde se aborda el tema de la Integral definida.

Para analizar el impacto ocasionado por esta propuesta y sobre todo el utilizar el software GeoGebra para la enseñanza del tema de integral definida, se realizó una investigación cuantitativa con un enfoque descriptivo. Para ello se emplearon dos instrumentos de recolección de la información que se aplicaron luego de terminar la propuesta didáctica. Se aplicó una prueba de conocimientos para medir los conocimientos adquiridos por los estudiantes, la misma que está estructurada de 10 preguntas y elaborada de acuerdo a los Indicadores Esenciales de Evaluación del tema de integrales definidas.

De los resultados obtenidos se puede mencionar que el promedio general del grupo es de 9/10 lo que indica que la propuesta tuvo un

impacto positivo en los estudiantes por lo que alcanzan los conocimientos mínimos propuestas para esta temática.

Se aplicó también una encuesta de percepción que fue adaptada de la investigación doctoral realizada por (García, 2011), donde se analiza la motivación de los estudiantes luego de utilizar el software GeoGebra.

Los resultados obtenidos de la encuesta de percepción son:

Tabla 1. Percepción del trabajo con GeoGebra

N.-	Criterio	De acuerdo %	En desacuerdo %
1	Usando GeoGebra tengo confianza al resolver problemas	80	20
2	Con GeoGebra aprender más rápido	60	40
3	El GeoGebra permite trabajar más rápido	93,33	6,67
4	Utilizando GeoGebra entiendo mejor los conceptos	80	20
5	El GeoGebra me motiva a aprender	73,33	26,67
6	Trabajar en clases con GeoGebra me impulsa a participar	86,67	13,33

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en la encuesta de percepción sobre la utilización del software GeoGebra son positivos, pues la mayoría de los estudiantes están de acuerdo con los criterios que favorecen la utilización del programa para abordar el tema de integrales definidas, sienten que pueden aprender más rápido y tienen confianza a la hora de estudiar matemáticas, generando una motivación por aprender.

Es preciso indicar también, que el porcentaje que está en desacuerdo puede ser debido a que las clases fueron en línea y no se pudieron responder a todas las inquietudes de los estudiantes y no sintieron un acompañamiento del docente, puesto que al no poder estar en contacto

directo con el docente se les limita a solventar las dudas que puedan tener.

Conclusiones

En tiempos de pandemia donde prevalece la educación virtual el utilizar el Software GeoGebra como recurso didáctico resulta muy útil, debido a su fácil obtención, instalación y manejo, a más de generar un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, permitiendo alcanzar los conocimientos mínimos y despertando la motivación por aprender, pues les permite aprender mejor y más rápidamente.

El rol del docente en los procesos de aprendizaje sigue siendo importante, puesto que es él quien plantea las estrategias de enseñanza y aprendizaje, para ello, puede incorporar recursos tecnológicos que le faciliten su trabajo; dejando claro que las TICS solo ayudan, más no reemplazan la labor docente.

Referencias Bibliográficas

- Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B. & Hidalgo, B. (2015.). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. Revista Tecnológica - ESPOL, 28(5), 121-132. <http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/429>
- Castro, S., Guzmán, B. & Casado, D. (2007). Las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Laurus Revista de Educación, 13(23), 213-234. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76102311>
- Del Pino, J. (2013). El uso de GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. Revista de didáctica de la Estadística, 2, 243-250. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770290>
- García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Tesis doctoral sin publicar, Universidad de Almería. Almería.
- Guachún, P. & Mora, M. (2019). El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de la función lineal: Una propuesta didáctica.

- Revista Números de didáctica de las Matemáticas, 101, 103-112.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7053215>
- Hernández, R. (2017). Impacto de las TIC en la educación: Retos y Perspectivas. *Propósitos y Representaciones*, 5(1), 325-347.
<http://dx.doi.org/10.20511/pyr2017.v5n1.149>
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2020). Plan Educativo Covid19.
<https://educacion.gob.ec/plan-educativo-covid-19-se-presento-el-16-de-marzo/>
- Ruíz, H., Ávila, P. & Villa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas (pp. 446-454).
<http://funes.uniandes.edu.co/2187/>