Papel de GeoGebra en el desarrollo de la intuición matemática

GeoGebra's role in the development of mathematical intuition

José Enrique Martínez Serra

Arelys García Chávez

Introducción

Como parte de los modelos pedagógicos constructivistas, conectivistas y enactivistas que defendemos como soportes para las buenas e innovadoras prácticas educativas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, está el empleo del software de Geometría Dinámica GeoGebra con diferentes fines didácticos, uno de ellos, que los estudiantes tengan un papel activo y protagónico durante el proceso de obtención de nuevas proposiciones matemáticas, como parte del desarrollo de su intuición matemática.

El presente taller tiene como **objetivo:** Analizar algunas potencialidades de GeoGebra para el desarrollo de la intuición matemática de los estudiantes.

Marco conceptual y procedimental

Disquisiciones teóricas y prácticas sobre el desarrollo de la intuición matemática

- **Conceptualmente** se asumen las disquisiciones teóricas ofrecidas en (Gómez, 2017, p.30. 31) "Una intuición es una idea que posee las dos propiedades fundamentales de una realidad concreta y objetivamente dada:
  - Inmediatez (evidencia intrínseca) y
  - Certeza (no la certeza convencional formal, sino la certeza inmanente, prácticamente significativa)."
- **Procedimentalmente**, se considera la clasificación de las intuiciones que se ofrece en Fischebein (1987)
  - **Intuiciones afirmatorias**: son representaciones o interpretaciones de varios hechos aceptados como ciertos, autoevidentes y auto-consistentes. Una intuición afirmatoria se puede referir:
    - Al significado de un concepto, por ejemplo, el significado intuitivo de nociones como fuerza, punto, línea recta, etc.
    - Al significado de relaciones o a una afirmación, por ejemplo, la fuerza como algo necesario en orden a mantener un cuerpo en movimiento.
    - A la aceptación de una inferencia, la cual puede ser inductiva o deductiva; por ejemplo, de A=B y B=C uno deduce intuitivamente que A = C.
  - **Intuiciones conjeturales**: son hipótesis asociadas con los sentimientos de certeza. Por ejemplo "estoy seguro que llegarás a ser un excelente matemático".
  - **Intuiciones anticipatorias**: son también conjeturas, pero han sido clasificadas separadamente, dado que pertenecen más explícitamente a la actividad de resolución de problemas. Se caracteriza porque:
    - Es la perspectiva preliminar, global, de una solución de un problema, y precede al análisis y al desarrollo de una solución.
    - No toda hipótesis es una solución; únicamente esas hipótesis que van asociadas, al comienzo, con el

sentimiento de certeza y de evidencia, son intuiciones anticipatorias.

    - La naturaleza contradictoria de la intuición anticipatoria (y la intuición en general) se expresa en las revelaciones introspectivas del matemático: en su forma inicial, la solución se percibe simultáneamente como cierta e imperativa y también como tenue, sutil, transitoria y pasajera.

- **Intuiciones conclusivas:** resumen en una conclusión, en una visión global, las ideas esenciales de una solución de un problema que ha sido previamente elaborado. Esta perspectiva total, global, añade a la construcción formal y analítica un sentimiento de intrínseca y directa certidumbre (certeza).

Conjunto de proposiciones que se abordan en la EGB y el BGU, conjeturables por los estudiantes

A continuación, se señalan una serie de proposiciones que se abordan en la EGB y el BGU, agrupadas en los diferentes bloques curriculares, y que, empleando metodologías activas y recursos didácticos innovadores adecuados, pueden llegar a ser conjeturables por los estudiantes.

Especialmente, se señalan, en negritas y cursivas, aquellas que serán abordadas durante el desarrollo del TALLER.

- De la Geometría y Medida
    - Perímetro de polígonos regulares.
    - Área de polígonos regulares.
    - Perímetro y área del rectángulo.
    - Perímetro y área del cuadrado.
    - Perímetro y área del triángulo en general.
    - Perímetro y área del triángulo isósceles.
    - Perímetro y área del triángulo equilátero.
    - Perímetro y área del paralelogramo.
    - Perímetro y área del trapecio.
    - Perímetro y área de polígonos en general.
    - Perímetro y área del círculo.

- Relación entre las medidas en grados y en radianes de los ángulos.
- ***Equidistancia de los puntos de la bisectriz de un ángulo a las semirrectas del ángulo.***
- ***Equidistancia de los puntos de la mediatriz de un segmento a los extremos del segmento.***
- ***Ángulos entre paralelas.***
- Suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.
- ***Suma de las amplitudes de los ángulos exteriores de un triángulo.***
- ***Teorema del ángulo exterior de un triángulo.***
- ***Desigualdad triangular.***
- Teorema de Pitágoras.
- ***Teorema de la altura.***
- ***Teorema de los catetos.***
- ***Suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero.***
- ***Suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono en general.***
- ***Amplitudes de los ángulos centrales, inscritos y seminscritos de la circunferencia.***
- Fórmula de Euler para poliedros (C+V=A+2).
- Áreas y volúmenes de prismas y pirámides.
- Áreas y volúmenes de cuerpos redondos: conos, cilindros, esferas.

* De Algebra y funciones
    - Propiedades algebraicas de las operaciones con números reales.
    - Leyes de compatibilidad de las relaciones de igualdad y de orden.
    - Propiedades de las potencias.
    - Propiedades de los radicales.
    - Propiedades de los logaritmos.
    - Identidades trigonométricas.
    - Productos notables.
    - Raíces de ecuaciones cuadráticas.

    - Raíces de ecuaciones polinómicas.
- De la Estadística y Probabilidad
    - Técnicas de conteos mediante combinaciones, permutaciones y variaciones.
    - Medidas de tendencia central y medidas de dispersión.
    - Distribuciones de probabilidad.

Conjunto de proposiciones que no se abordan en la EGB y el BGU, conjeturables por los estudiantes.

A continuación, se señalan una serie de proposiciones que NO se abordan en la EGB y el BGU, agrupadas en los diferentes bloques curriculares, y que, empleando metodologías activas y recursos didácticos innovadores adecuados, también pueden llegar a ser conjeturables por los estudiantes.

Especialmente, se señalan, en negritas y cursivas, aquellas que serán abordadas durante el desarrollo del TALLER.

- De Geometría y Medida
    - ***Suma de las amplitudes de los ángulos exteriores sobre obtusos de un triángulo.***
    - ***Concurrencia de las tres alturas en el ortocentro del triángulo.***
    - ***Concurrencia de las tres medianas en el baricentro del triángulo.***
    - ***Concurrencia de las tres bisectrices en el incentro del triángulo y existencia de la circunferencia inscrita del triángulo.***
    - ***Concurrencia de las tres mediatrices en el circuncentro del triángulo y existencia de la circunferencia circunscrita del triángulo.***
    - Ley de los senos para triángulos cualesquiera.
    - Ley de los cosenos para triángulos cualesquiera.
    - Ley de las tangentes para triángulos cualesquiera.
    - ***Existencia de la circunferencia de los nueve puntos en triángulos acutángulos, de Euler o de Feuerbach (ciclicidad de los puntos medios de los tres lados del***

triángulo, los pies de las alturas del triángulo y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo).

- ***Existencia de la recta de Euler triángulos acutángulos (colinealidad del ortocentro, el circuncentro, el baricentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo).***
- Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en un punto interior, si y solamente si este es convexo.
- Existencia de cuadriláteros no inscribibles en una circunferencia (no tienen circunferencia circunscrita) (no cícilos).
- Exigencias que deben cumplir los cuadriláteros cícilos.
- Paralelogramo que se forma uniendo los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero convexo.
- En todo cuadrilátero convexo se cumple que la suma de los cuadrados de las diagonales e igual a la suma de los cuadrados de las simedianas (segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos)
- Si un cuadrilátero está circunscrito entonces la suma de sus lados opuestos son iguales.
- En un cuadrilátero convexo se cumple $a^2+b^2+c^2+d^2=d_1^2+d_2^2+4m^2$, donde a, b, c, d son los lados; d1, d2, las diagonales y m, la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.
- Teorema de las secantes en una circunferencia.
- Teorema de la tangente en una circunferencia.
- Lugares geométricos planos y tridimensionales (https://www.geogebra.org/m/jnatcnzd)

* De la Estadística y Probabilidad
  - Distribuciones de probabilidad.
  - Ley de los grandes números.
* De Algebra y funciones
  - Teoremas relativos a los Cálculos Infinitesimal, Diferencial e Integral de funciones.

A continuación, se presenta una muestra de las actividades realizadas durante el desarrollo del Taller interactuando con GeoGebra y que no están contempladas en el curriculum de la enseñanza general:

1. ***Actividades para la obtención de la proposición 1: "Suma de las amplitudes de los ángulos exteriores sobre obtusos de un triángulo".***
   a. Construir un triángulo ABC cualquiera y verificar que se cumple el clásico teorema de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.

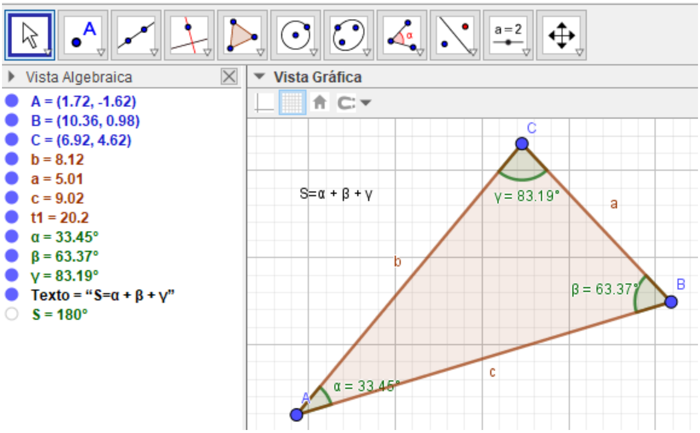

Figura 17. Triángulo ABC cualquiera donde se verifica el clásico teorema de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores

   b. Manipular cualquiera de los vértices dinámicos sin que ninguno sobrepase al otro semiplano de donde se encuentra el vértice con respecto a la división del plano por la recta que contiene al lado opuesto al vértice y verificar que se sigue cumpliendo el teorema.
   c. Manipular cualquiera de los vértices dinámicos logrando que sobrepase al otro semiplano de donde se encuentra el vértice con respecto a la división del plano por la recta que contiene al lado opuesto al vértice y verificar que **tendrá lugar un nuevo teorema.**

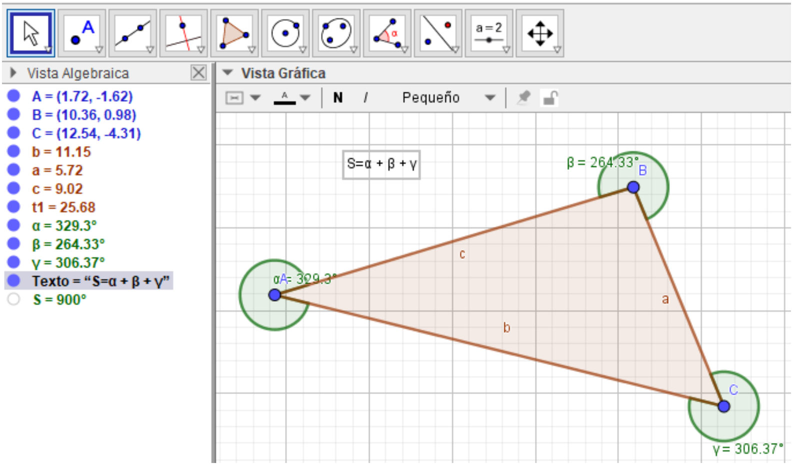

Figura 18. Nueva proposición que puede conjeturarse a partir de la manipulación de la figura anterior

d. Enunciar la nueva proposición obtenida.

Enunciado de la nueva proposición: "***La suma de las amplitudes de los ángulos exteriores sobre obtusos de un triángulo siempre es 900°***"

2. *Actividades para la obtención de la proposición 2: Existencia de la circunferencia de Feuerbach*

a. Construir un triángulo ABC acutángulo.
b. Construir los puntos medios de los tres lados del triángulo M1, M2, M3.
c. Construir los pies de las alturas del triángulo, H1, H2, H3.
d. Construir los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo J1, J2, J3.
e. Coloque como no visibles los segmentos y puntos auxiliares utilizados en el trazado.

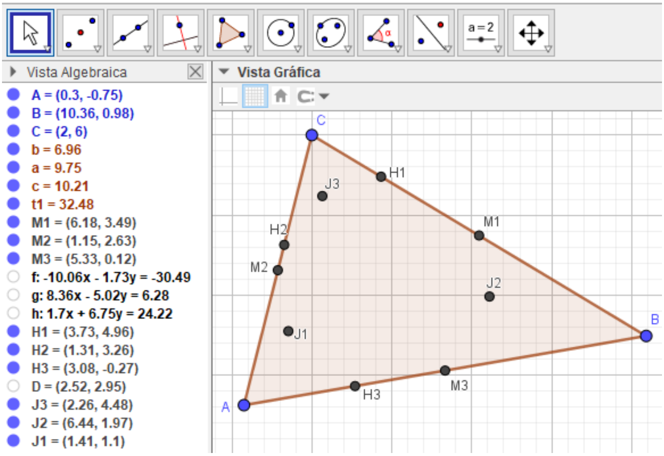

Figura 19. Visualización de los nueve puntos construidos mediante los pasos precedentes

f. ¿Qué puede afirmar sobre los 9 puntos anteriormente construidos?

R/ Los 9 puntos pertenecen a una circunferencia.

g. Trace la circunferencia antes referida.

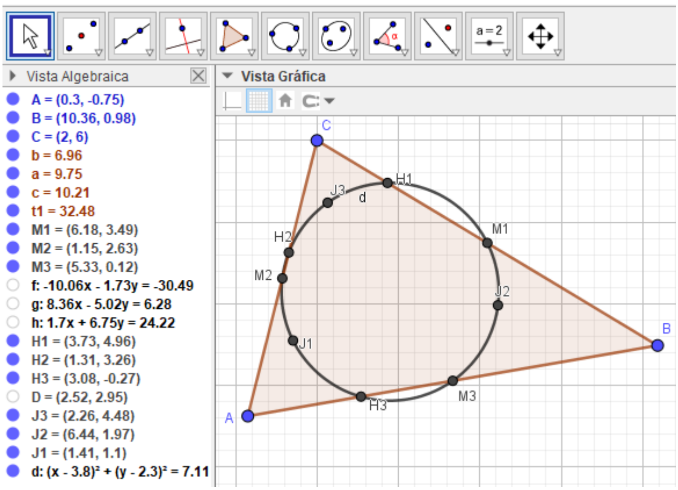

Figura 20. Construcción de la circunferencia que pasa por los 9 puntos

h. Manipule a su antojo cualquiera de los vértices del triángulo ABC. ¿qué se observa?

R/ Se observa que, para ciertos triángulos, algunos puntos quedan fuera del triángulo y dicha circunferencia solo pasaría por algunos de los 9 puntos del triángulo, aunque sí seguirá pasando por los puntos asociados al triángulo, que son externos al triángulo.

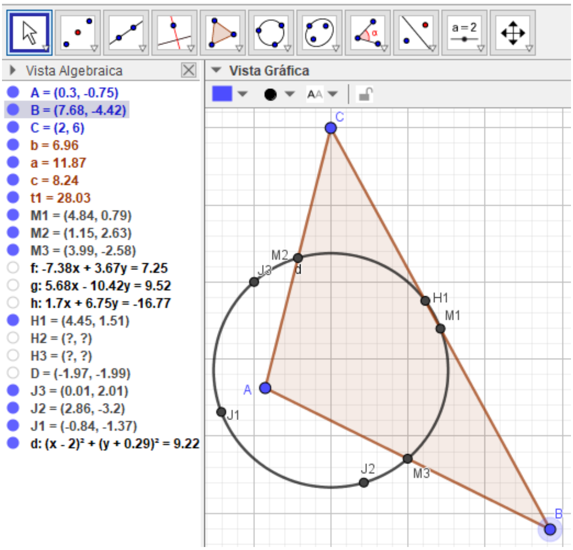

Figura 21. Caso interesante que aparece durante la manipulación del triángulo original, hasta convertirlo en obtusángulo

i. Delimitar para cuáles triángulos se puede trazar dicha circunferencia en puntos del triángulo, no fuera de él.

R/ En todos, aunque en algunos (los obtusángulos), los puntos notables queden externos al triángulo.

j. Enunciar la nueva proposición obtenida.

R/ Enunciado de la nueva proposición: ***En todo triángulo existe la circunferencia de los nueve puntos, de Euler o de Feuerbach, que pasa por los***

puntos medios de los tres lados del triángulo, los pies de las alturas del triángulo y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo.

3. ***Actividades para la obtención de la proposición 3: Existencia de la recta de Euler en triángulos acutángulos (colinealidad del ortocentro, el circuncentro, el baricentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo).***
   a. Construir un triángulo ABC acutángulo.
   b. Construir la circunferencia de los 9 puntos, siguiendo las actividades del apartado anterior.
   c. Delimitar el ortocentro D.
   d. Delimitar el centro de la circunferencia de los 9 puntos E.
   e. Construir las mediatrices y delimitar el circuncentro S del triángulo.

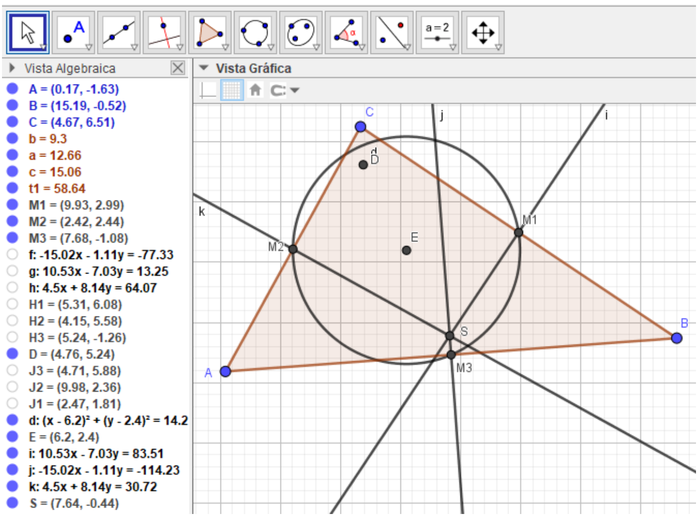

Figura 22. Figura que se retoma de las actividades anteriores y donde construye, además, el circuncentro

   f. Construir las medianas y delimitar el baricentro T.

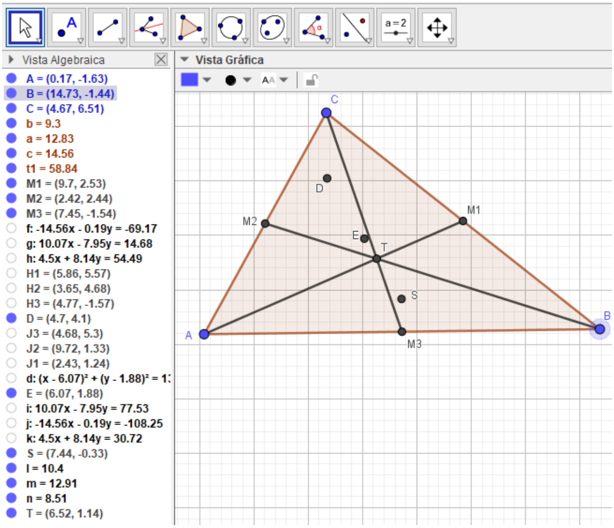

Figura 23. Figura que retoma las actividades anteriores y donde construye, además, el baricentro

g. Ocultar los elementos auxiliares diferentes a los 4 puntos.

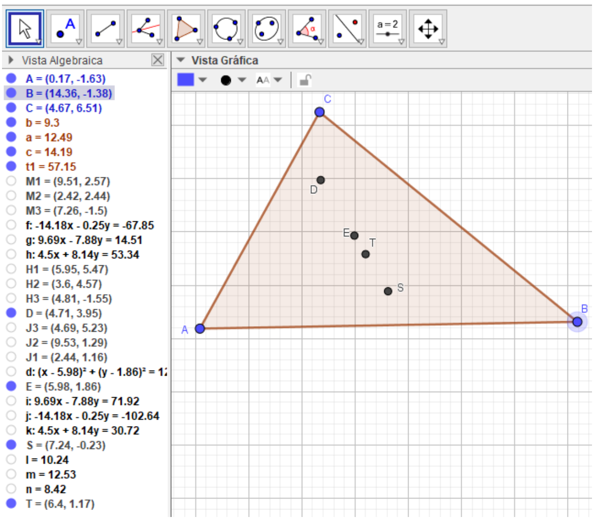

Figura 24. Figura donde se muestran los 4 puntos notables que se pidieron en los pasos anteriores

h. ¿Qué puede afirmar sobre los 4 puntos anteriormente construidos? R/ Los 4 puntos pertenecen a una recta.

i. Trace la recta antes referida.

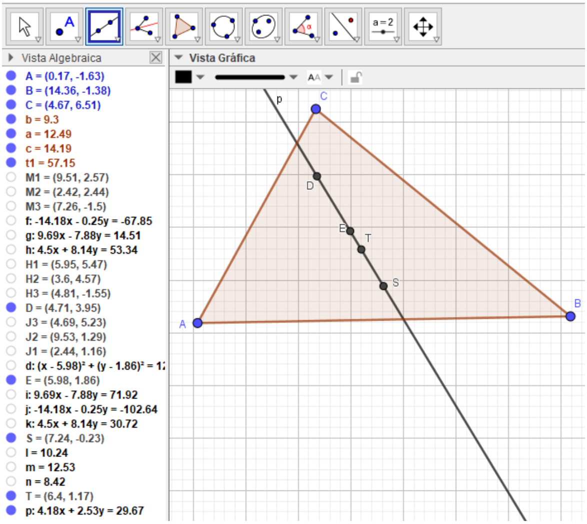

Figura 25. Figura que muestra la colinealidad de los 4 puntos construidos

j. Manipule a su antojo cualquiera de los vértices del triángulo ABC. ¿qué se observa?

R/ Se observa que, para ciertos triángulos, algunos puntos descritos quedan fuera del triángulo y dicha recta solo pasaría por algunos de los 4 puntos del triángulo, aunque sí seguirá pasando por los puntos asociados al triángulo, que son externos al triángulo.

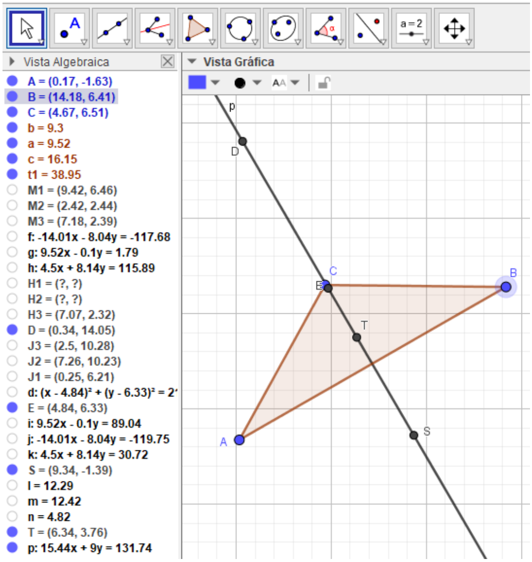

Figura 26. Figura que muestra un caso interesante de un triángulo obtusángulo, donde algunos puntos notables caen fuera del triángulo

k. Delimitar para cuáles triángulos se puede trazar dicha recta.

R/ En todos los triángulos, aunque en algunos los puntos notables queden por fuera del triángulo.

l. Enunciar la nueva proposición obtenida.

R/ Enunciado de la nueva proposición: ***En todo triángulo existe la recta de Euler que pasa por el ortocentro, el circuncentro, el baricentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo.***

Tarea para enviar el lunes 7 de diciembre al correo: jose.martinez@unae.edu.ec

Escoger un teorema de cualquier ámbito de las Matemáticas y presentar las actividades a realizar con los estudiantes, encaminadas al desarrollo de su intuición matemática mediante la formulación de proposiciones.

Bibliografía

Davis, P. J. Y Hersh, R. (1988). Experiencia matemática. Barcelona: Labor-MEC.

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics. Kluwer.

Gómez-Chacón, I. Mª. (1998). Creencias y contexto social en matemáticas, Revista de Didáctica de las matemáticas, UNO, 17, 83-104, 1998

Gómez-Chacón, I. Mª. (1998). Matemáticas y contexto. Enfoques y estrategias para el aula. Madrid: Narcea.

Guzmán, M. (1991). Para pensar mejor. Barcelona: Labor