CAPÍTULO 1

UN NUEVO ENFOQUE DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PARA EL SIGLO XXI: MÉTODO ABIERTO BASADO EN NÚMEROS

Abdón Pari Condori
apariducho@gmail.com
Universidad Adventista de Bolivia

1. Introducción

Aunque las matemáticas se han enseñado y aprendido durante milenios, hasta los años ochenta del siglo pasado no se había estudiado de manera seria la naturaleza y la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina (Cantoral y Farfán, 2003, p.28). Según los expertos en didáctica e investigadores de educación matemática, existe un consenso en que el enfoque convencional para la enseñanza de las matemáticas centrado en la exposición, que promueve la memorización de reglas, fórmulas y transferencia de estrategias de resolución de problemas es menos relevante para las necesidades del estudiante del siglo XXI (Ablewhite, 1971; Adamuz y Bracho 2011; Martínez, 2011). De acuerdo con esta perspectiva, es necesario buscar, generar y plantear nuevas alternativas didácticas que supongan cambios profundos en la concepción de su enseñanza y aprendizaje, así como propuestas que puedan contribuir a los aprendizajes del siglo XXI, y que coadyuven en la forja de competencias como el pensamiento crítico, la comunicación, la colaboración y la innovación. Además, Ecuador requiere trabajadores con alta capacitación que puedan afrontar problemas complejos, ciudadanos que puedan pensar, razonar y comprometerse de manera eficaz con la resolución de problemas cuantitativos (Smith y Stein, 2016).

En esta misma línea, se presentarán las sugerencias aportadas por instituciones profesionales tales como el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2015) en el libro *De los principios a las acciones: para garantizar el éxito matemático para todos*. Esta obra recomienda que la enseñanza de las matemáticas se haga de manera activa, que desarrolle una forma de pensar que pueda dar sentido al entorno y aplique toda la tecnología disponible. Esta visión actual de la comunidad internacional vinculada con la enseñanza de las matemáticas implica un cambio en su perspectiva: define a disciplina como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la experimentación, formulación, contrastación y justificación de conjeturas. Así mismo, promueve mirar el entorno desde un punto de vista matemático para buscar patrones y regularidades en las situaciones problemáticas.

Desde esta mirada, el capítulo presentará al nuevo enfoque de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas denominado método Abierto Basado en Números o método ABN, creado por Jaime Martínez Montero (2000, 2008, 2010) a fines de la primera década del siglo XXI. Fue presentado en el VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM, 2017) desarrollado en Madrid. Los estudios empíricos muestran diferencias significativas cuando los estudiantes llegan a la resolución de problemas y este método pone eso en práctica. Hay diferencias que se observan con estudiantes que aprenden con el algoritmo tradicional Cerrado Basado en Cifras (CBC) y los que aprenden con el método ABN cuando llegan a la resolución de problemas (Aragón et al., 2017; Martínez, 2011). Es decir, el método ayuda a que los estudiantes consigan un logro superior con respecto a lo que aprenden con el método tradicional.

El método empezó a aplicarse en las unidades educativas de Cádiz, España. En menos de diez años se extendió en gran parte de España, luego llegó a países hispanoamericanos como Argentina, México, y Chile (Aragón et al., 2017), y a Ecuador. Las Figuras 1 y 2 ilustran su presencia en España y en el mundo, respectivamente.

Figura 1. El uso del método ABN en Europa

Fuente: *Elaborado por Actiludis*

Figura 2. El uso del método ABN en América

Fuente: *Actiludis*

Como se puede observar en la Figura 1, la incorporación del método ABN está creciendo en América, en particular en los países del sur. En Ecuador se viene utilizado desde el 2017 en el Centro de Apoyo de la Universidad Nacional de Educación-UNAE, en la ciudad de Lago Agrio, provincia de Sucumbíos, con profesores participantes de los cursos de Formación Continua y en el Programa de Profesionalización que oferta la UNAE. El método se ha incluido como uno de los temas en el módulo de Matemática, Geometría y Estadística: problematización y diversidad epistemológica. La UNAE lo empezó a utilizar en el 2018 con los estudiantes del séptimo ciclo de la carrera de Educación.

El método ABN ha alcanzado una mayor aceptación entre los estudiantes de Educación Básica Itinerario Pedagógico Académico de la Matemática y ha motivado a varios estudiantes a desarrollar temas de proyectos de integración de saberes (PIENSA). Tras trabajar con este método en las aulas de la UNAE, también se lo implementó como método de trabajo para la práctica preprofesional con estudiantes de Educación Básica, subnivel elemental y medio de la Unidad Educativa Luis Cordero de la ciudad de Azogues. Varios estudiantes se han interesado en profundizar en sus fundamentos y en su aplicación y como resultado han presentado sus investigaciones en conferencias, seminarios, talleres, eventos académicos y científicos de alcance nacional e internacional, como en el IV COBISEMAT-2019 (Coloquio Binacional sobre Educación Matemática) organizado por la Universidad de Cuenca. También un docente fue invitado a presentar el método en la Conferencia Inaugural del I Encuentro Internacional de Jóvenes Investigadores en Educación Matemática, Matemática e Interculturalidad (Figura 3).

Figura 3. Conferencia sobre el método ABN en la Universidad Nacional de Educación, 2019

Fuente: *Elaboración propia (2019)*

A nivel internacional, el método ha sido expuesto en la Universidad del Pacífico de Buena Ventura, Colombia; Universidad Católica Boliviana de La Paz; Universidad Adventista de Bolivia y Universidad Simón I Patiño, Cochabamba, Bolivia. Este método despierta gran interés y motivación en los docentes y directivos de las diferentes unidades educativas.

A continuación, nos enfocaremos en explicar el método Abierto Basado en Números a fin de responder preguntas como: en qué consiste, cuáles son sus fortalezas, cuál es su diferencia con respecto al algoritmo tradicional Cerrado Basado en Cifras y por qué se está expandiendo de forma tan vertiginosa.

2. Algunos antecedentes

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han tenido siempre un lugar preeminente en la escuela, si bien tradicionalmente no ha sido la disciplina más popular entre los estudiantes, ha sido percibida como un saber de menor utilidad en la vida cotidiana, es la que más suspensos tiene en casi todos los países, es más, se la juzga como una materia asequible solo para alumnos aventajados, tanto que en algunos casos se la ha utilizado como medida de inteligencia de los estudiantes (Adamuz y Bracho, 2014; Martínez, 2010). Justamente por estas dificultades encontradas, la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles ha sido y es fuente de preocupación para las instituciones, padres de familia y maestros.

Analizando la situación, se puede ver que el error es pensar que los problemas se deben a que el niño no *se le da bien* las matemáticas cuando lo que realmente ocurre es un problema de enseñanza: el método, la manera de enseñar ha impedido que su aprendizaje se convierta en algo más vivenciado y que el niño tome el protagonismo de su aprendizaje (Cano y Morín, 2016, p.5). John Megaton, en una entrevista, afirmó que "las matemáticas son fáciles, el problema es el método con que se enseña". En realidad, las matemáticas son asequibles y su saber es imprescindible para la vida del ciudadano y para el desarrollo intelectual y humano.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de las matemáticas y por su mejora progresiva, son tan antiguas como la enseñanza misma y como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan tiene apenas unas cinco décadas (Cantoral y Farfán, 2003, p.28). Ya en 1971, Ablewhite advertía de los muchos problemas que se originaban en el aprendizaje de las operaciones y cómo los alumnos con dificultades sufrían en mayor medida por el método que se utilizaba (Martínez, 2011, p.95). A partir de esta preocupación, se ha estudiado y se han publicado trabajos de diferentes autores y escuelas que señalan las disfunciones y complicaciones derivadas del empleo de unos algoritmos muy poco adecuados para los sujetos a los que estaban destinados. Adamuz y Bracho (2014) explican parte del problema:

> Maier (1987) afirmaba que el uso de las cuatro reglas de cálculo en la escuela era solo una cuestión de supervivencia escolar, es decir, se aprende para tener éxito en la escuela, y desde entonces han sido muchos los autores que nos han hablado del poco sentido pedagógico que tienen los algoritmos tradicionales hoy día y de los problemas derivados de su enseñanza (Baroody, 1988; Chamorro, 2005; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Gómez, 1999; Martínez, 2011; Maza, 1989; NCTM, 2000), entre otros muchos; sin embargo en la mayoría de las escuelas se siguen enseñando las cuatro operaciones básicas de forma tradicional (p.41).

Cano y Morín (2016) añaden más información acerca de los problemas detectados:

> Existen una serie de razones que plantean el porqué las matemáticas resultan difíciles de aprender (Oyaga, 2015; Resnik, 1990; Servais, 1980; Skemp, 1980;), esto se debe a su nivel de abstracción, su gran nivel de concreción y la necesidad de aprender bajo la guía de un maestro. No se puede echar la culpa en su totalidad a esta idea, sino, como señalamos anteriormente, debemos cambiar la forma en que se imparte esta materia, planteándose de una forma totalmente diferente (p.5).

En la actualidad, los niños siguen pasando muchas horas en la escuela y en la casa practicando matemáticas mediante procedimientos mecánicos y memorísticos que no entienden. Las investigaciones han demostrado que tiene más sentido dedicar tiempo en la escuela a enseñar a los niños a entender el porqué y el para qué las matemáticas desde un proceso constructivo y social que aprender procedimientos mecánicos.

2.1Algoritmo Cerrado Basado en Cifras (CBC)

El algoritmo CBC fue diseñado por Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci (1175-1240), matemático italiano que difundió en Occidente los conocimientos científicos del mundo árabe. En 1202 publicó su obra más importante, el *Liber Abaci* (*El Libro del ábaco* o el *Libro de cálculo*) que popularizó el uso de cifras del sistema árabe. Fibonacci defendió apasionadamente el sistema indoarábigo, el que ahora todo Occidente utiliza, y trató de convencer a sus contemporáneos de las ventajas de usar los nuevos números, explicó su correcta utilización y sus ventajas para la contabilidad y el cambio de moneda.

Fibonacci es considerado como el primer algebrista de Europa cronológicamente hablando. Su padre, como ciudadano de la ciudad de Pisa, ocupaba un puesto importante como funcionario consular en la aduana de Bugia, en el norte de África (hoy Argelia). Allí Fibonacci tomó contacto por primera vez con la lengua árabe aritmética, en la tienda de un comerciante de especies, y con la numeración hindú posicional que incluía el 0 (cero), un sistema que los árabes habían adoptado de forma general y que era diferente de la numeración griega y la romana. Él se entusiasmó con este nuevo tipo de cálculo y se dedicó a instruirse aprovechando sus viajes: estuvo en Egipto, Siria, Grecia y Sicilia, lugares en los que pudo contactar con matemáticos árabes de su tiempo.

Reunió el material en el *Liber Abaci,* le dio un orden, unidad de método y claridad para su enseñanza. Por su caudal de ejemplos, sirvió como manual de aritmética para uso de los comerciantes. La obra expone nociones suficientes sobre el cálculo digital, tablas de adición y multiplicación, mostrando su uso para realizar las cuatro operaciones con cifras de considerable extensión. El libro fue ampliado en una segunda redacción en 1228.

A partir de ese momento, comenzó una larga discusión entre los defensores de cada sistema de numeración: los llamados abacistas o partidarios del ábaco y los de la vieja notación romana, los algoristas, entusiastas del nuevo y revolucionario método. Con todo esto, se tuvo que esperar más de 300 años, hasta bien entrado al siglo XVI, para que el nuevo sistema de numeración se hiciera universal y se empezara a utilizar.

En el campo de la educación matemática actual, por muy variados que sean los recursos didácticos y las técnicas de enseñanza utilizadas, el sistema de numeración decimal-posicional constituye un problema para los estudiantes porque ellos no llegan a comprender bien las reglas del sistema, lo que ocasiona dificultades en la operatoria, ya que no logran visualizar la relación entre organización del sistema y los algoritmos convencionales de las operaciones.

2.2 Dificultades en el aprendizaje del algoritmo CBC

La presentación del número a través del algoritmo tradicional CBC implica para el niño dificultades que se agravan al iniciar su aprendizaje en edades tempranas. Como señala Kamii (1986): "la enseñanza prematura, sea del valor de la posición o de cualquier otro aspecto del programa de estudios, es perniciosa para la comprensión de una disciplina por parte de los niños" (p.71).

Consideremos las operaciones de suma, resta y multiplicación con el algoritmo CBC:

$$\begin{array}{r|r|r} & & 3456 \\ 3456 & 8456 & \text{x } \underline{0034} \\ + \underline{4678} & + \underline{4638} & 1384 \\ 8134 & 3818 & \underline{10368} \\ & & 117504 \end{array}$$

El primer problema para el aprendiz es que los números se escriben de izquierda a derecha, pero las operaciones de suma, resta y multiplicación se realizan en sentido contrario, de derecha a izquierda. Para el adulto que lo ha utilizado por años, parece normal, pero para el niño que está aprendiendo esto es un problema.

De igual modo, cuando se realiza la suma de dos números con más de dos cifras, como se muestra en el ejemplo, se deben sumar las unidades cinco y seis, se obtiene 11 (5+6=11) y se lleva 1. Pero, cuando sumamos las segundas cifras que son 4 y 8 (4+8=12), no se está sumando números, sino cifras, porque sumando como números sería 48 (40+80=120), y el resultado es 120.

$$\begin{array}{r} 2345 \\ + \underline{4786} \\ 7131 \end{array}$$

En el caso de la resta también se procede de la misma manera. Incluso se utiliza el término *presto*, que nunca se *devuelve*. Para la multiplicación se enseña a los niños a dejar un espacio, pero sin ninguna explicación. Al multiplicar por las decenas no habría la necesidad de dejar espacio, sino que se completaría con el cero.

El algoritmo CBC resulta complicado porque fue creado para resolver cálculos de adultos, para resolver problemas financieros, administrativos, contables de empresas y no para atender problemas de aprendizaje ni para potenciar las capacidades y habilidades del niño. En aquella época se buscaba formar personas que fueran capaces de resolver las operaciones de una forma ágil, sin cometer errores, porque no se contaba con las tecnologías actuales como las calculadoras científicas, ordenadores o celulares. Otro problema es que guarda poca relación con las actividades de la vida real, por ejemplo, en la práctica cotidiana, cuando se tienen billetes de diferentes valores 100, 50, 20, 10, etc., se suelen contar desde el número mayor hasta el menor; en cambio por ese algoritmo la suma se enseña comenzando por los menores. Finalmente, el algoritmo CBC implica un proceso memorístico, mecánico y de proceso único que fue importado a la escuela tal como estaba estructurado.

La presentación cerrada y acabada a través del algoritmo CBC que siguen los libros de texto oculta el zigzagueante camino de los procesos matemáticos, lo que no estimula el desarrollo del pensamiento crítico ni los valores científicos en el aprendiente. Además, las exigencias del currículo escolar tradicional obligan a cumplir un programa compacto dentro del marco cerrado de la asignatura, lo que no propicia ese encanto por las matemáticas al tiempo que genera un proceso de aprendizaje mecánico y memorístico de algoritmos, reglas o fórmulas.

Afortunadamente, en el siglo XXI, la didáctica de la matemática ha retomado teorías anteriores para redefinirlas en un marco nuevo en el que el estudiante es el protagonista de su aprendizaje y el docente su acompañante en ese proceso educativo. De ese modo, los resultados ayudan a entender el proceso de aprendizaje de los niños considerando que las matemáticas son fundamentales en el desarrollo intelectual y humano de la persona porque le permiten desenvolverse de forma eficiente en una sociedad de avance progresivo de la ciencia y la tecnología.

El método ABN implica nuevas formas de aprender, desaprender y reaprender; invita a descubrir y redescubrir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de forma motivadora y creativa. Su objetivo es desarrollar en el estudiante las competencias matemáticas para identificar y entender la función que desempeña en el mundo, emitir juicios fundamentados y relacionarse con las matemáticas de forma que puedan satisfacer sus necesidades y actuar como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. En definitiva, se trata de un método innovador, que respeta el ritmo de aprendizaje del estudiante y logra motivarlo a que presente una actitud positiva hacia las matemáticas.

2.3. Algoritmo Abierto Basado en Número (ABN)

El método ABN se enmarca en el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), que considera al aprendizaje de las matemáticas como una actividad: se aprende matemáticas haciendo matemáticas. Implica un método de cálculo escrito y mental que el niño aprende de forma natural, intuitiva, creativa, dinámica, con situaciones cercanas y materiales tangibles y manipulables. Respeta el ritmo de aprendizaje del niño, pues busca que este entienda y comprenda los pasos del proceso, que no calcule mecánicamente, que desarrolle su capacidad intelectual y su competencia matemática. De ese modo, por un lado, rompe en muchos aspectos con el método tradicional de CBC, cerrado, con una única respuesta posible, que propugna el aprendizaje mecánico de las operaciones. Por otro lado, mejora el rendimiento matemático en cuanto al cálculo mental, operaciones y resolución de problemas y toma de decisiones.

Los principios en los que se basa el método son las siguientes:

a. *Principio de igualdad:* no existe un gen matemático que sea poseído por algunos niños y no por otros; ni siquiera se ha localizado el gen que predisponga al aprendizaje. No hay personas “negadas” para las matemáticas, aunque es cierto que ciertas personas aprenden mejor y más rápido que otras. En todo caso, con ayuda, todos pueden lograr una competencia matemática aceptable.

b. *Principio de la experiencia:* no se puede suprimir la experiencia de aprendizaje, por ello, la escuela debe proporcionar ricas experiencias, con el fin de que el niño pueda construir el saber matemático sobre lo base de lo que ya conoce. Las matemáticas son muy abstractas, por eso es importante darle sentido concreto con manipulación de objetos tangibles.

c. *Principio de la transferencia:* se muestran todos los pasos que se siguen, sin ocultar nada al niño y dando significado a todo lo que realiza, de forma que conozca en todo momento lo que está haciendo en el proceso de resolución.

d. *Principio de adaptación al ritmo de aprendizaje individual:* la estructura del método ABN es muy flexible, cada niño puede efectuar sus cálculos a un ritmo individual. No es racional que todo el alumnado efectúe el cálculo del mismo modo y al mismo tiempo.

e. *Principio de autoaprendizaje y autorregulación:* el niño es consciente de los pasos que va desarrollando y tiene control sobre ello, puede agrupar o desdoblar los cálculos y mejorarlos en la medida en que va comprendiendo y asimilando lo que va haciendo.

Otra ventaja del método es que puede ser aplicado y trabajado por profesores de diferentes niveles: infantil, primario y secundario. En tal sentido, se puede considerar como un método propicio a los nuevos tiempos en los que los cambios frenéticos han modificado las necesidades de aprendizaje que se tenían décadas atrás (Bracho, 2013; Martínez, 2010).

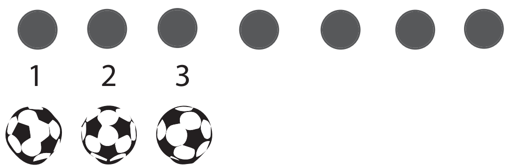
a) Acción de contar

Según Martínez (2010), "la numeración es, sin duda, uno de los elementos matemáticos que más se desaprovechan en la escuela" (p.63), su proceso de aprendizaje es bastante débil e incompleto, muy centrado en la única capacidad de reconocer y escribir grafismos (símbolos), con muy escasos ejercicios de composición y descomposición. Como es muy importante que los más pequeños asimilen las nociones esenciales para adquirir una base sólida para su recorrido académico, personal y profesional, los primeros cálculos que realicen son ejercicios claves en su aprendizaje de las matemáticas. Más allá de memorizar, los niños deben desarrollar un razonamiento lógico para ser capaces de encontrar o generar respuestas adecuadas a un problema dado. Sin embargo, en nuestro sistema educativo no se presta la debida atención al proceso de contar (o conteo) ni al desarrollo del sentido numérico en el niño.

A menudo, cuando niños de 2 o 3 años son capaces de recitar los números del 1 al 10, sus padres presumen que ya saben contar. Sin embargo, cuando estos niños tienen delante un montón de manzanas y empiezan a contarlas, no dicen un número por cada manzana. Unas veces señalan varias manzanas entre un número y el siguiente, y otras veces dicen varios números para una misma manzana. Estos niños han aprendido de memoria una secuencia de palabras, pero están lejos de saber contar, pues para saber contar debe desarrollarse primero el concepto de correspondencia de uno a uno. Es decir, aprender a contar significa que a cada objeto le corresponde una única palabra (número), por ejemplo, 1 al primer objeto, 2 al segundo objeto, 3 al tercer objeto y así sucesivamente, hasta que se acaban todos los objetos que queremos contar.

La representación figurativa se refiere al hecho de que el alumno puede reconocer conjuntos representados con una clara referencia a su naturaleza, por ejemplo, si en una lámina existen tres balones de fútbol será capaz de contarlas al igual que lo haría si contase tres balones reales. La idea se explica en la Figura 4.

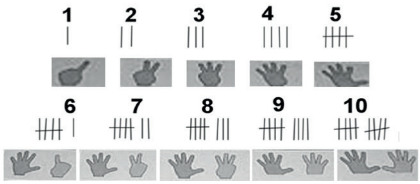
Figura 4. Representación figurativa



Fuente: *Elaboración propia*

Para llegar a la correspondencia uno a uno se requiere coordinar dos procesos previos: la partición y la etiquetación. La primera corresponde a la capacidad de separar los objetos en dos categorías (contados y no contados); la segunda es la capacidad para identificar la secuencia de los números (1, 2, 3…) y asignarle un número a cada elemento del conjunto (ver Figura 5).

Figura 5. La correspondencia uno a uno



Fuente: *Elaboración propia*

El aprendizaje de un sistema de numeración no es algo fácil, sino una tarea que se puede encontrar erizada de dificultades. El niño suele aprender los nueve primeros números y el cero en el último año de la Educación Infantil, y se introduce en los números siguientes y en el sistema de agrupación y representación en el primer curso de Educación Básica. Solo un par de cursos después es frecuente observar a alumnos que son capaces de escribir números representados por un alto número de cifras. En términos generales, se ha instalado en las escuelas de educación infantil que los niños no pasen del número nueve en sus ejercicios de numeración y en sus actividades de contar. Basadas en esta creencia, las diversas editoriales que proveen de textos a este sector, incluyen en sus libros de textos y fichas de trabajo ejercicios en los que los números nunca llegan a 10.

Causa asombro el grado de unanimidad que tal creencia ha suscitado entre los profesores de educación infantil. Tal limitación en el aprendizaje deriva en situaciones curiosas, por ejemplo, la del niño que cuenta con los dedos y que no sabe por qué deja siempre sin utilizar y sin contar el dedo meñique de una mano, puesto que no pasó del 9 en la educación infantil. Esto ya comienza a sembrar dificultades en el camino de aprendizaje de la numeración. Esta práctica, en consecuencia, exige un nivel de elaboración simbólica y de abstracción demasiada elevada para un niño de 4 o 5 años. Según Martínez (2010, p.63), es mejor esperar un mayor nivel de maduración para adentrarse en estos niveles mentales más escurridizos.

El problema de la decena no se percibe cuando se cuenta con los dedos. Se da el supuesto de que todas las cantidades se representan con una estructura isomorfa o que simbolizan directamente al sistema de escritura de la numeración en base 10. Si el niño cuenta los 10 dedos no encuentra la diferencia entre el dedo 9 y el dedo 10, solo lo hace cuando tiene que expresar ese número con cifras. La palabra *diez* no es tan simple, además, en los nombres de los números aparece la referencia a la decena a partir del dieciséis y no antes; esto no ocurre en otras lenguas como el aymara (1 = *maya*, 2 = *paya*, 3 = *kimsa*, 4 = *pusi*, 5 = *phisqa*, 6 = *suxta*, 7 = *paqalqu*, 8 = *kimsaqalqu*, 9 = *llatinka* y 10 = *tunka*), en la que a partir de 10 se coloca la palabra *tunka* y la unidad.

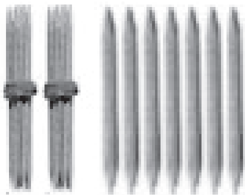
Por ejemplo, 11 es *tunka mayani*, 12 es *tunka payani*, así sucesivamente; 30 es *kimsa tunka*.

Muchas de las tareas que se hacen en la clase pueden ser aprovechadas para reforzar el dominio de la numeración y, en este caso, la tarea de contar. Por ejemplo, podría encargarse a un niño el control de la asistencia, al contar a los estudiantes presentes podría deducir el número de estudiantes que faltan. También se les podría pedir a los niños que hagan un inventario de los materiales de la clase, para ellos tendrán que contar las mesas, las sillas, los libros, los lápices, etc.; además de contar, se percatarán si hay o no recursos para todos, cuántos deben compartir una determinada cosa u objeto.

Según Martínez (2010, p.61), el proceso de comprensión de agrupación en unidades de orden superior no se alcanza hasta una edad más elevada que la que corresponde al primer año de educación básica. Pero esto no significa que el niño no sepa escribir numerosos bidígitos correctamente (por imitación, por interiorización de reglas a las que no les confiere sentido). De hecho, que el niño sea capaz de reproducir exactamente lo que el profesor le ha indicado no quiere decir que comprenda perfectamente lo que está haciendo.

Para la introducción de la decena a los niños, se recomienda utilizar material concreto de acuerdo con la edad y nivel de aprendizaje y reforzar la representación de los números de forma concreta agrupándolos de 10 en 10. Por ejemplo, para representar el número 27 tenemos dos grupos de 10 unidades que son equivalentes a 20 unidades y 7 unidades tal como se explica en la Figura 6.

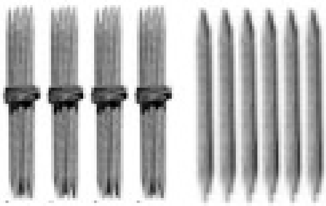
Figura 6. Representación de decenas y unidades



Fuente: *Benito (2015)*

Para representar 46, necesitamos 4 grupos de 10 unidades y 6 unidades, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Representación de decenas y unidades



Fuente: *Benito (2015)*

La dificultad que entorpece el proceso de enseñanza-aprendizaje de la numeración y de las operaciones básicas es que muchas veces se busca enseñar el tema desde la rigidez del sistema de numeración, lo que desfigura las realidades que presenta, infortunadamente el problema de fondo ha pasado desapercibido por los maestros e investigadores.

b) Suma o adición

En la mayor parte del sistema escolar y en casi todos los materiales escolares, la operación de la suma aparece concretada bajo la forma del algoritmo CBC, un algoritmo de llegada, resumen, síntesis de pasos y procedimientos minuciosos con los que los alumnos deben iniciarse y poner en marcha sus potencialidades a la hora de resolver operaciones. En cambio, el algoritmo ABN de la suma toma como referencia el manejo de números y no la combinación de cifras; por su propio diseño elimina la mayor parte de las dificultades que plantea la operación de sumar en su forma tradicional.

El meollo de la *suma o adición* es que hay que acumular un sumando en el otro. Una vez que esté totalmente acumulado, el nuevo sumando nos dará el resultado. Con el método tradicional, el estudiante tiene que descomponer en unidades, decenas, centenas y a partir de ahí juntar los iguales y sumarlos de derecha a izquierda teniendo en cuenta las *llevadas*. Las cuentas se realizan de forma mecánica y no hay posibilidad de saltarse esta regla. Además, es contraria a la forma como lee nuestra mente, por lo que se vuelve más difícil para el niño.

Con el método ABN, el niño se siente motivado y con una actitud positiva, ya que trabaja con una metodología que lo impulsa a resolver las operaciones de una forma más fácil y menos mecánica, lo que le sirve para ir interiorizando el saber matemático de forma comprensiva, significativa y creativa. Se debe empezar a trabajar los números amigos, es decir, los complementos de los números, por ejemplo, lo que nos hace falta para completar la decena de un número: el número amigo de 7 es 3 porque juntos completan la decena; el número amigo de 2 es el 8 porque juntos completan la decena, y así, sucesivamente.

Soraya tiene 46 dólares y su tía le ha regalado 27 más por su cumpleaños ¿Cuántos tiene ahora?

El estudiante elige el número que desea agregar. Por ejemplo, si elige agregar primero 10 dólares y así, obtenemos 46+10 igual a 56 dólares, luego agrega otros 10 dólares y obtiene 56+10 igual a 66 dólares, y para completar los 70 dólares agrega 4. Finalmente agrega los 3 y obtiene 73 dólares. Esta es una alternativa, pero cada estudiante tiene la libertad de elegir el número o la cantidad que desea agregar de acuerdo con su ritmo o capacidad de hacer las operaciones. En una clase de 20 estudiantes podría haber 20 procesos diferentes como se indica en la Tabla 1.

Tabla 1. Operación de la suma con el método ABN

27+46 =73		
Agrego	Queda	Resulta
4	23	50
10	13	60
10	3	70
3	0	73

Fuente: *Elaboración propia*

La Tabla 1 se simplifica en la medida que los niños se acoplan a la metodología. En el formato evolucionado ya no aparece la cabecera de las columnas, tampoco el número de filas. Así, poco a poco los niños serán capaces de prever el número de filas según el número de veces en que resolverá la operación. Por ejemplo, después de los primeros aprendizajes el formato quedaría como lo indica la Tabla 2.

Tabla 2. Operación de la suma con el método ABN

27+46 =73		
Agrego	Queda	Resulta
4	23	50
10	13	60
10	3	70
3	0	73

Fuente: *Elaboración propia*

Si pasamos a tres cifras. se transformarán hasta las centenas, tal como explica la Tabla 3.

María Luisa es una niña muy juiciosa y ha conseguido ahorrar 349 dólares durante el año y su abuela le ha regalado 118 más por su cumpleaños ¿Cuántos tiene ahora?

Tabla 3. Operación de la suma con ABN

118+349=467		
Agrego	Queda	Resulta
100	18	449
10	8	459
1	7	460
7	0	467

Fuente: *Elaboración propia*

Como ya se indicó, el niño es libre para elegir la cantidad que considera conveniente. Pero no es la única alternativa, cada niño avanza de acuerdo con su ritmo.

El empleo de este formato supone un cambio importante en el modelo de chip: se deja de trabajar con cifras y se realiza los cálculos con números, lo que supone trabajar la tabla de sumar teniendo en cuenta esta característica. Tenerla en cuenta esto significa que lo que el alumno sabe hacer con las unidades (combinar tres con nueve, por ejemplo) ha de saber hacer con las decenas (treinta con noventa) o con centenas (trescientos con novecientos). La extensión de este conocimiento de las tablas a los nuevos órdenes es algo muy sencillo para el niño y lo hace en poco tiempo, sin demasiado entrenamiento y con mucha exactitud.

c) Resta o sustracción

Debemos recordar que aprender esta operación es más difícil para el niño, pues abarcamos con ese nombre operaciones diversas, pero que admiten un procedimiento común de resolución. Cada modelo, según Martínez (2010), conlleva manipulaciones muy distintas, por lo que aplicar el mismo algoritmo a todos supone un proceso de abstracción que no es sencillo llevar a cabo. Cuando nos referimos a la resta, casi todos pensamos en una cantidad determinada de la que quitamos otra. No hay más que un número, y el que debemos quitar no está en ninguna parte, sino en nuestra cabeza. Los procesos de restar (que tienen como soporte este modelo) parecen los más sencillos:

quitar, gastar, entregar, perder, etc. Sin embargo, cuando queremos que el niño resuelva este problema manipulativamente, con apoyo de material concreto y numérico, nos damos cuenta de que es de los más difíciles porque tiene que quitar un número que solo está en la cabeza y apenas dispone de apoyo empírico para las descomposiciones que debe efectuar.

Según Martínez (2010, p.241), los problemas de la resta son numerosos y bastante diferentes, pese a que todos ellos se resuelven con la misma operación. Incluso, señala que existen trece problemas distintos de restas, pero por la manipulación se reducen a cuatro tipos:

- *Detracción*: a una cantidad, quitar una indicada y contar lo que queda.
- *Escalera ascendente*: se parte de una cantidad a la que hay que añadir para llegar a la otra.
- *Escalera descendente*: se parte de una cantidad a la que hay que quitar para llegar a la otra.
- *Comparación*: hay que buscar, por cuanto una cantidad es mayor o menor que otra.

A continuación, se presentan ejemplos de cada tipo.

Manipulación por comparación: A-B=C

En este tipo de problemas se comparan dos cantidades conocidas, el mayor y el menor, y se pregunta por la diferencia.

Juan tenía 326 dólares ahorrados y ha gastado 128 en comprar regalos para su madre. ¿Cuánto dinero le queda?

Para resolver el problema mediante el método ABN, se van quitando cantidades del minuendo y sustraendo, hasta agotar el sustraendo. Este proceso se representa en tres columnas, en la primera se refleja la cantidad que se va quitando de las otras dos y en la segunda y tercera se indica las cantidades del minuendo y sustraendo debajo de las cantidades que resultan tras quitar la de la primera columna, tal como se observa en la Tabla 4.

Tabla 4. La resta con el método ABN

326-128=198		
Quito	Cantidad mayor	Cantidad menor
100	226	28
20	206	8
6	200	2
2	198	0

Fuente: *Elaboración propia*

Otro problema que resolver con el método ABN por comparación sería:

En la Unidad Educativa República del Ecuador de la ciudad de Cuenca hay 746 niñas y 325 niños ¿Cuántos niños menos hay? Observar la Tabla 5.

Tabla 5. La resta con el método ABN

746-325 = 421		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
300	25	446
20	5	426
5	0	421

Fuente: *Elaboración propia*

Para un adulto, los números pueden representar en su mente la cantidad real a la que se refieren, pero los niños carecen de esa experiencia.

Manipulación en escalera ascendente: A+X=C

Es un tipo de sustracción no común en los libros de texto y cuadernos de trabajo de los alumnos, pero sí en los problemas y situaciones de la vida diaria. Se da cuando se parte de una cantidad y se necesita ir añadiendo hasta llegar a otra mayor, que sabemos cuál es. Por ejemplo:

Cuando empezó la fiesta de cumpleaños había 12 niños y cuando acabó había 25. ¿Cuántos niños se incorporaron a la fiesta?

Para resolver el problema mediante el método ABN, solo necesitamos dos columnas, en la primera se coloca la cantidad que se va poniendo (*añado*) y en la segunda (*llego a*) iremos poniendo las sumas parciales que alcanzamos al añadirle al sustraendo las cantidades que cada uno va poniendo, hasta llegar a la cifra del minuendo. Luego se sumarán las cantidades de la primera columna, lo que será el resultado, como se puede observar en la Tabla 6.

Tabla 6. Operación de la resta con el método ABN

25-12=13	
Añado	Llego a
2	14
6	20
5	25
13	

Fuente: *Elaboración propia*

Podría parecer un problema incongruente por cuanto tiene el sentido de crecer y aumentar, sin embargo, se resuelve con la sustracción. Se trata de una situación muy familiar al estudiante, por lo que no conlleva demasiadas dificultades.

Manipulación en escala descendente A-X=C

Es la situación inversa a la manipulación en escalera ascendente, por lo que mucho de lo señalado es aplicable aquí. La mayor diferencia con respecto al caso anterior es una mayor congruencia con el sentido de la operación de la resta. Para esto se considera el siguiente ejemplo:

En una cesta había 28 plátanos y después de merendar había 15. ¿Cuántos plátanos se han comido?

Para comprender el proceso, se puede observar la Tabla 7.

Tabla 7. La resta con el método ABN

28-15=13	
Quito	Llego a
3	25
5	20
5	15
13	

Fuente: *Elaboración propia*

Manipulación por detracción: A-B=X

Parece el modelo más sencillo. Es el más representado y el que proporciona más ejemplos de problemas escolares. De alguna forma, se emplea como prototipo de la resta. Por ejemplo:

En una pastelería de Lago Agrio se han elaborado 347 empanadas de las cuales se han vendido 246 por la mañana. ¿Cuántas empanadas quedan para la tarde?

En las restas se transfiere fuera (quitando de ambas cantidades el número fijo de la izquierda). Por ejemplo, si se quita 200, se obtiene una operación equivalente 147-46, luego se quita 6 y se tiene 141-40 y, finalmente, se quita 40 y se obtiene 101- 0, que es igual a 101, como se observa en la Tabla 8.

Tabla 8. La resta con el método ABN

347-246=101		
Quito	Quedan por quitar	Restan
200	46	147
6	40	141
40	0	101

Fuente: *Elaboración propia*

Como se ve en la tabla, estamos ante un problema inverso a la comparación.

d) Multiplicación o producto con el método ABN

El nuevo formato ABN supone una transformación radical del algoritmo tradicional. Tanto en la apariencia como en la esencia de los cálculos, poco tiene que ver con el CBC. Según Martínez (2010, p.151), es más transparente, posee más sentido, guarda más relación con las manipulaciones que se llevan a cabo con objetos reales cuando se multiplica una cantidad y, sobre todo, permite un control de los cálculos, completamente imposible con el algoritmo CBC.

La multiplicación en ABN se basa en la aplicación de una propiedad muy poco utilizada en la operatividad básica de las matemáticas, la propiedad *distributiva*. Por ejemplo, para multiplicar dos números sencillos (56 x 7) puede hacerse por el algoritmo tradicional, o bien aplicando la propiedad distributiva que siempre será más intuitiva. Al descomponer 56 en decenas y unidades se tiene 50+6, por lo que esta operación será más fácil así:

(50 + 6) x 7 = 50 x 7 + 6 x 7= 350 + 42 = 392

Es decir, el 50 por 7, el 6 por 7 y se suman fácilmente ambos productos parciales. Habitualmente se denomina al primero multiplicando (56) y al segundo multiplicador (7).

Para efectuar esta operación con el método ABN, se la traslada a la Tabla 9, luego se descompone el multiplicando en vertical y el multiplicado en horizontal. Por ejemplo, para multiplicar 56 x 7.

Tabla 9. La multiplicación con el método ABN

56x7=392		
Multiplicando en unidades	7	Suma de productos parciales
50	350	
6	42	392

Fuente: *Elaboración propia*

El ejemplo presentado fue con dos y una cifra. En la Tabla 10 se puede observar con tres y una cifra.

Tabla 10. La multiplicación con el método ABN

345x8=2760		
Multiplicando en unidades	8	Suma de productos parciales
300	2400	
40	320	2720
5	40	2760

Fuente: *Elaboración propia*

En la Tabla 11 se observa con dos y dos cifras.

Tabla 11. La multiplicación con el método ABN

58x24=1392				
Multiplicando descompuesto en unidades	Multiplicador por decenas	Multiplicador por unidades	Productos parciales	Producto acumulado
	20	4	1200	
50	1000	200		
8	*160*	*32*	*192*	*1392*

Fuente: *Elaboración propia*

En la Tabla 12 se presenta con tres y dos cifras.

Tabla 12. La multiplicación con el método ABN

364x25				
Multiplicando en unidades	Productos parciales	Productos parciales	Productos acumulados	Productos acumulados
	20	5	7500	
300	6000	1500		

60	1200	300	1500	9000
4	80	20	100	9100

Fuente: *Elaboración propia*

e) División o cociente en ABN

Para dividir con el método ABN se requiere un gran dominio de las operaciones suma, resta y multiplicación. Los términos de la división son el dividendo y el divisor, pero se recomienda explicar el concepto de la aproximación secuencial al dividendo mediante productos que contengan al divisor. En la Tabla 13 se ejemplifica la operación con dos y una cifra.

Tabla 13. Operación de la división con el método ABN

	88	:	7	
	Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales	
	88	70	10	
	18	14	2	
Resto	4		12	Resultado

Fuente: *Elaboración propia*
Nota. *El dividendo (88), el divisor (7), el cowciente (12) y el resto (4).*

Con tres y dos cifras se aumenta el número de cifras como se ha hecho en la multiplicación. Para efectuar una división de 674 entre 56 se hace una aproximación como se muestra a continuación. Aunque se podría hacer arbitrariamente, es mejor a través de las siguientes aproximaciones: 52 por 2 es igual a 104; 52 por 5 es 260; y 52 por 10 es 520. También si fuera necesario hacer por 20, 50 y 100, etc. Para comprenderlo mejor, se puede observar la Tabla 14.

674: 52
52*2=104   52*20=1040

52*5=260 52*50=2600
52*10=520 52*100=5200

Tabla 14. La división con el método ABN

674	:	52
Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales
674	520	10
154	104	2
50		12

Fuente: *Elaboración propia*
Nota. *El dividendo es 674, el divisor 52, el cociente 12 y el resto 50.*

Con cuatro y dos cifras se puede hacer los que se indica en la Tabla 15.

5396 ÷ 58
58x2=116 58x20=1160
58x5=290 58x50=2900
58x10=580 58x100=5800

Tabla 15. La división con el método ABN

5396	:	58
Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales
5396	2900	50
2496	1160	20
1336	1160	20
176	116	2
60	58	1
2		93

Fuente: *Elaboración propia*
Nota. *El dividendo es 5396, divisor 58, cociente 93 y resto 2.*

La forma de realizar la operación con cinco y dos cifras se puede observar en la Tabla 16.

59831 ÷ 28
28x2=56, 28x20=***560,*** 28x200=5600.
28x5=140, 28x50=1400, 28x500=14000.
28x10=280, 28x100=***2800***, 28x1000=***28000.***

Tabla 16. La división con el método ABN

59831	:	28
Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales
59831	28000	1000
31831	28000	1000
3831	2800	100
1031	560	20
471	280	10
191	140	5
51	28	1
23		2136

Fuente: *Elaboración propia*

En cada una de las operaciones se parte de un problema, estos pueden ser adaptados o tomados del contexto del estudiante, pero siempre de acuerdo con su nivel de aprendizaje. La ventaja es que permiten pasar por las cuatro fases del aprendizaje de las matemáticas: concreto, semiconcreto, simbólico y abstracto.

4. Conclusiones

Tras revisar la literatura disponible y observar varios videos, blogs y documentos sobre la implementación del método ABN y tras experimentar el uso del método en cursos de formación continua para profesores en servicio y con estudiantes de la carrera de Educación Básica en la Universidad Nacional de Educación UNAE, se concluye que el método Abierto Basado en Números es un modelo de aprendizaje natural, dinámico, abierto, creativo y bastante completo. Entre sus fortalezas están que ayuda al estudiante a interiorizar las matemáticas de forma lúdica y creativa, mostrando diferentes caminos para resolver una operación y creando una actitud positiva hacia ellas. Esto contrasta con el formato tradicional que fue creado para resolver cálculos de estimación y transacción con el propósito de llevar la contabilidad de empresas y administraciones, y no para atender la psicología del niño ni con el afán de conseguir mayor desarrollo intelectual.

El formato tradicional que se ha enseñado y se sigue enseñando está basado en cifras y no en números. El algoritmo CBC impulsa el aprendizaje memorístico, mecánico y reproducido en el examen. En cambio, el método ABN se basa en números propiciando en el estudiante un ámbito natural, intuitivo con referentes concretos semiconcretos y simbólicos para llegar a la abstracción del pensamiento matemático. Así, el método ABN es coherente con los enfoques constructivistas y está en correspondencia con el Modelo Pedagógico de la UNAE que da protagonismo al estudiante en su aprendizaje y que concibe al docente como un facilitador.

En la actualidad se considera que la potencialidad del aprendizaje de las matemáticas no está en la capacidad de hacer los cálculos de operaciones, sino en la capacidad de comprender el proceso a través de diferentes representaciones, así como de relacionar y transformar una representación en otra. También se pretende formar ciudadanos con la capacidad y habilidades de resolver problemas y tomar de decisiones complejas y desconocidas. Además, los requerimientos actuales de la sociedad son distintos y requieren competencias matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana de forma creativa y proponer alternativas de solución que potencien las habilidades matemáticas, sociales y epistemológicas de los educandos.

El método se encuentra en un proceso de implantación, por eso aún no se cuenta con una evaluación cuantitativa, con datos que evidencien su funcionalidad en los niños ecuatorianos. En otros países ya se han realizado estudios al respecto y los resultados demuestran las ventajas del método en relación con los niños que aprenden con el algoritmo CBC. Sin embargo, algunos profesores y estudiantes se muestran resistentes al cambio porque no quieren salir de su zona de confort y argumentan que este método solo se puede utilizar en la educación básica, por lo que el estudiante, cuando avance al ciclo medio, deberá ajustarse y reaprender las operaciones con el algoritmo CBC; otros consideran que el método solo sirve para las operaciones aritméticas y no para la resolución de otro tipo de operaciones. La postura es entendible porque todos fuimos formados con el algoritmo CBC y cuesta introducir alternativas creativas.

Profesores y estudiantes deberían implementar el método en el proceso de enseñanza-aprendizaje por las ventajas alegadas: ayuda a comprender el proceso de las operaciones con lo que genera una actitud positiva hacia las matemáticas y la vida, a diferencia del CBC que ha creado una imagen negativa de la disciplina, tal como se refleja en los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales. Investigadores y profesores interesados en mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje deberían implementar el método ABN y avanzar con propuestas y estudios para su análisis sistemático.

Referencias bibliográficas

Ablewhite, R. (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Morata.

Actiludis (2015). *Añadir ubicación al mapa de centros ABN*. https://cutt.ly/1vAYOyM.

Adamuz, N. y Bracho, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación para la justicia social*, *3*(1), 37-53.

Aragón, E., Delgado, C. y Marchena, E. (2017). Diferencias de aprendizaje matemático entre los métodos de enseñanza ABN y CBC. *Psycology, Society & Education, 9*(1), 61-70.

Benito, M. (2015). *El método ABN. Algoritmos Abiertos Basados en Números* [Trabajo de fin de grado]. Universidad de Valladolid.

Bracho, R. (2013). *Menos reglas más sentido: Alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la educación primaria.* CIBEM.

http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/301.pdf.

Cano, C. y Morín, C. (2016). *La enseñanza de las matemáticas mediante el método algoritmo ABN en el segundo ciclo de Educación Infantil.* [Trabajo de fin de grado]. Universidad de La Laguna.

Cantoral, R y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Relime*, *6* (1), 27-40.

Kamii, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Nueva Paideia.

Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica para el siglo XXI*. CISS-Praxis.

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales.* Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2011). El método de cálculo Abierto Basado en Números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales Cerrados Basados en Cifras (CBN). *Bordón 63*(4), 95-110.

National Council of Teacher of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático para todos.* Comité Interamericano de Educación Matemática.

Smith, M. y Stein M. (2016). 5 prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemática. The Nacional Council of Teacher of Mathematic.