CAPÍTULO 3

EMPODERAMIENTO DOCENTE: UNA REFLEXIÓN A PARTIR DE LA REPRODUCIBILIDAD DE SITUACIONES DE ENSEÑANZA

Javier Lezama
flezama@ipn.mx
CICATA del Instituto Politécnico Nacional
CDMX, México

Daniela Reyes-Gasperini
daniela@empoderamientodocente.org
Empoderamiento Docente
CDMX, México

1. Introducción

> La Sociología difiere de las otras ciencias al menos en un punto: se exige de ella una accesibilidad que no se le pide a la Física, ni siquiera a la Semiología o a la Filosofía. Rechazar la obscuridad es quizá también una manera de poner de manifiesto qué se desearía comprender, o estar seguro de comprender, cosas que se siente que vale la pena comprender. En todo caso, no hay sin duda dominio en el que el 'poder de los expertos' y el monopolio de la 'competencia' sea más peligroso e intolerable. Y la Sociología no se merecería ni una hora de esfuerzo si tuviera que ser un saber de expertos reservado a expertos (Bourdieu, 2003, p.7).

Lo mismo se podría decir de la matemática educativa como campo científico de conocimiento. Es un campo que estudia a la sociedad cuando edifica y genera escenarios para su construcción y cuando comunica conocimiento matemático en la escuela, pero no solamente en ella. El rigor y erudición es indispensable para sus constructos y métodos y para investigar los fenómenos que la ocupan y que se constituyen en edificación de conocimiento, El profesor de matemáticas demanda de ideas y conocimientos bien fundamentados para innovar su práctica. Se aspira a que en nuestra discusión se pueda alcanzar tan alto propósito.

2. El fenómeno didáctico de la reproducibilidad

Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica es establecer explícitamente los factores que posibilitan o no el logro de sus propósitos didácticos al repetirla en distintos escenarios. Alrededor del fenómeno del envejecimiento de situaciones de enseñanza se inicia la exploración del fenómeno de la reproducibilidad ya que, como se verá más adelante, este fenómeno está asociado a la actividad de repetir la misma clase o situación en varios escenarios distintos.

Brousseau (1986, p.45) introdujo la noción de *envejecimiento de las situaciones de enseñanza* para designar el problema que experimenta el profesor para reproducir una misma lección con nuevos estudiantes. Los resultados que se obtienen son diferentes en cada repetición y en ocasiones mucho más pobres. Él afirma que el profesor siente la necesidad de modificar las instrucciones, su exposición, los ejemplos, los ejercicios y en ocasiones hasta la estructura misma de la lección y, mientras más repite la lección, este fenómeno se acentúa hasta llegar a cambiar el sentido de la lección original. Reconoce que las situaciones con poca interacción entre alumno y profesor, como las exposiciones seguidas de ejercicios o instrucciones acompañadas de una situación de aprendizaje, envejecen más lentamente.

Como se mencionó anteriormente, el envejecimiento de situaciones está asociado a otro de índole más general, el de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza. Brousseau (1981) formula preguntas que ayudan a vislumbrar la problemática asociada al fenómeno de la reproducibilidad: el hecho de reproducir situaciones de aprendizaje provoca una pregunta que es esencial para la didáctica ¿qué es lo que realmente se reproduce? Y agrega:

> Un profesor que reproduce la *misma historia*, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos "¿ha reproducido el mismo *hecho didáctico* que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?" Además, declara saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica, no es un resultado de la observación, sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable (p.85).

Estas dos preguntas expuestas permiten, en principio, identificar elementos que pudieran caracterizar el fenómeno que designamos como *reproducibilidad.*

2.1 El primer estudio sistemático de reproducibilidad

La tesis doctoral *Contribuciones al estudio de la reproducibilidad de situaciones didácticas. Diversos trabajos de matemáticas y de didáctica de las matemáticas*, de Artigue (1984), constituye el primer estudio específico sobre la reproducibilidad. Las preguntas que guían su investigación son: ¿cuáles son los fenómenos observados y las variables que los determinan?, ¿qué relaciones existen entre las historias de clase y las historias individuales de los alumnos?, ¿se puede pasar de un discurso descriptivo a uno explicativo y, aún más, a uno predictivo a nivel de los alumnos, a nivel del grupo? Su objetivo es construir un modelo que caracterice a la reproducibilidad como un fenómeno didáctico para así poderlo estudiar, explicar y simular. No se busca que todo ocurra de la misma manera, se sabe que eso es imposible.

Según Artigue (1995, p.50), Brousseau es el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad e identifica dos tipos: *una externa*, de orden dinámico, que se ubica en el nivel de las historias de clase (actividades, procedimientos, etc.), y *otra interna*, que se coloca en el nivel de la comprensión de los significados. Y luego explica que las regularidades observadas a nivel de procedimientos y de órbitas deben ser esencialmente los hechos de regularidades individuales. Ellas no deben estar sujetas a las acciones de concentración y desbloqueo (actividades atribuidas al profesor: en la primera, interviene para regresar al problema a los estudiantes que se han dispersado; en la segunda, ayuda a los estudiantes a salvar dificultades que les impiden continuar trabajando el problema) producidas por el instructor. Adicionalmente, explica que las ligeras perturbaciones que no puedan evitarse y que se producen de una clase a la otra, no deben tender a amplificarse.

El modelo ingenuo presupone que las regularidades colectivas son la suma de las regularidades individuales, o bien, que las regularidades individuales finalmente se transforman en regularidades colectivas. Con base en este modelo, se tomarían las regularidades en las trayectorias individuales como los elementos que garantizan estabilidad y reproducibilidad suficiente para compartirse. Colocándonos en ese modelo, se considerarán las situaciones que mejor se adapten a sus características, es decir, a situaciones en las cuales el estudiante confronta individualmente la resolución de un problema preciso y controla por sí mismo los resultados de su actividad.

El método seguido por Artigue para establecer la reproducibilidad consistió en matematizar el modelo ingenuo. Para ello, se definen conceptos como los de trayectorias, historias individuales, historias de clase, órbitas, campo ponderado y la noción de vecindad sobre el conjunto de historias de clase, entre otras.

Artigue (2018, p.10), más de tres décadas después, vuelve al tema y desarrolla una profunda reflexión sobre el problema de reproducibilidad en didáctica de las matemáticas. Señala que reconoce que esta sufre “presiones constantes que aspiran a someterla a los modos de producción y de validación de las ciencias experimentales” (p.10), y pone como ejemplo el concepto de Evidence-Based Education inspirado en Evidence –Based Medicine (Biesta, 2010; Wiseman 2010).

En el artículo, Artigue (2018) revisa sintéticamente el largo proceso de investigación y reflexión sobre reproducibilidad, de forma metodológica y a través de procesos informáticos y de simulación, los cuales, a pesar de haber sido altamente valorados en su tiempo, no han podido encontrar continuidad en otros investigadores. Señala también que los diseños de actividades para la investigación muestran los vínculos entre investigación y acción didáctica y evidencian el modelo ingenuo de reproducibilidad centrado más en las historias, trayectorias, que en las condiciones que las hacen posibles. Además, señala que se busca más la reproducibilidad externa en detrimento de la reproducibilidad interna, la cual, por sí sola, puede garantizar los aprendizajes previstos.

2.2 Revisitando “Un estudio de la función 2^x”

En el año de 1998 se diseñó una ingeniería didáctica orientada a explorar nuevas maneras de abordar la función exponencial que formaba parte de un proyecto dirigido a la elaboración de un nuevo lenguaje gráfico (en el marco de la construcción de un universo de formas gráficas) que sea a su vez amplio, estructurado y que permita constituir una base de significaciones para procesos y conceptos del cálculo preuniversitario y universitario. Los resultados del estudio de reproducibilidad de dicha ingeniería, que constituyen las investigaciones de maestría y doctorado de uno de los autores de este capítulo, se reportaron en Lezama (2005, p.349). Más de dos décadas después, se buscó reflexionar el aspecto de la reproducibilidad interna revisitando la Ingeniería Didáctica denominada *Un estudio de la función 2^x* (Lezama, 2003, p.157). En particular, la situación se somete a un estudio de reproducibilidad sobre la base de los trabajos actuales de Artigue.

Para esta nueva visita al tema, se considerarán dos aspectos y se los explotará a partir de los avances de las investigaciones en socioepistemología. Se comenzará planteando qué es la socioepistemología, de manera general, pues los lectores podrán encontrar variada bibliografía al respecto. A grandes rasgos, constituye un sistema teórico para la investigación en matemática educativa que se ocupa de entender cómo se construye el saber matemático, reconocer formas de saber, popular, técnico y sabio, por lo que plantea de manera fundamental una relación social con el saber humano, por ello se puede afirmar que es una teoría que busca modelar *la construcción social del conocimiento matemático.* Esta disciplina reconoce que la escuela está dominada por una forma de pensar hegemónica (Soto y Cantoral, 2014), uno de sus fenómenos más aberrantes, pues implica la paradójica exclusión de muchos de aquellos a quienes busca beneficiar. Por tales motivos, la investigación desarrollada en este marco teórico propone el *rediseño del discurso matemático escolar*.

Volver a mirar hechos investigados en el pasado, a la luz del avance de la socioepistemología, no niega lo dicho en aquella época, por el contrario, se pueden interpretar los fenómenos que se produjeron de manera más consistente para continuar comprendiéndolos (una reflexión colateral: ¿podríamos decir alguna vez que hemos comprendido a cabalidad un asunto educativo? Se cree que la respuesta a esta pregunta es un no rotundo. En particular, la matemática educativa es una disciplina social que estudia la construcción de un conocimiento específico asociado a una disciplina dura, exacta. La combinación de ambas da lugar, a nuestro entender, a que continuamente estemos repensando las afirmaciones pasadas, ¿cierto? Cerramos la reflexión e invitamos a pensar en ello).

Así mismo, y ya en otro contexto de interpretación, se abordará la estructura de la situación de aprendizaje, su contenido y la relación que vincula al conocimiento matemático que emerge con la propuesta y las acciones del profesor que se apropia de ella, sujetándola a sus interpretaciones en busca de reproducirla y alcanzar el propósito didáctico. Dicho técnicamente, se espera alcanzar reproducibilidad, hecho que, mirado desde la teoría, representa un asunto de gran complejidad para alcanzarla en sus dos niveles, externo e interna o, como declara

Artigue (2018, p.25), restringirse como en muchos otros casos a solo una reproducibilidad de procedimientos.

2.3 Propósito de la situación

La situación *Un estudio didáctico de la función 2^x* está orientada a que el estudiante construya la noción de función exponencial. Para ello se propone una serie de acciones y actividades que serán desarrolladas paso a paso a partir de criterios geométricos tales como localizar puntos en el plano, escribir tablas e identificar regularidades que permitan elaborar generalizaciones pertinentes.

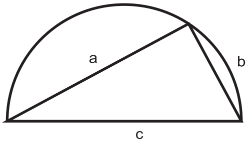
Se plantea una construcción cuyas características atienden a elementos geométricos y gráficos indispensables en el desarrollo de las actividades en las que se les solicita que efectúen trazos y localicen puntos en un sistema coordenado rectangular. La inducción de lo local a lo global se presenta en las actividades en las que se les solicita argumentar la posibilidad de localizar más puntos, y en las que se deberá argumentar sobre los cocientes y las diferencias que se observarán en otras tablas diferentes a las analizadas. También está presente el elemento de generalización, el cual se puede encontrar en la actividad en la que se les pide analizar las regularidades observadas para 2^x y, a partir de ello, extenderse a otras bases. El diseño completo se puede encontrar en Lezama (2003, p.57).

2.4 Características fundamentales del diseño

Se presentan algunos aspectos del diseño de la situación que servirán como elementos para la discusión.

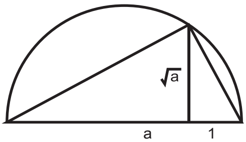
Se emplea como algoritmo para operar segmentos el siguiente resultado geométrico. Si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, como se muestra en la Figura 1, se obtiene un triángulo rectángulo. Así mismo, al trazar la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa, como se muestra en la Figura 2, se puede verificar que ese segmento corresponde a la media geométrica de los segmentos y el segmento unidad (1), a esto lo denominamos el *criterio de la media geométrica*.

Figura 1. Triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia



Fuente: *Elaboración propia*

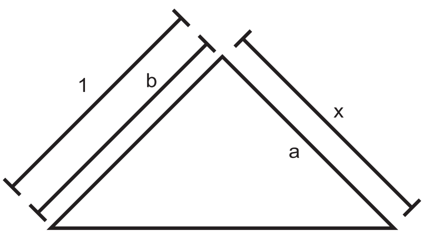
Figura 2. Criterio de la media geométrica



Fuente: *Elaboración propia*

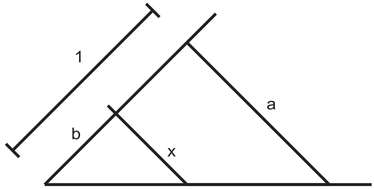
Otra herramienta geométrica empleada para operar segmentos es la siguiente: dados dos segmentos de magnitudes y *b*, respectivamente, se tiene . Necesariamente, entonces, su producto se puede obtener geométricamente arreglándolo como se muestra en la Figura 3, si (), o en la Figura 4 (b<1). En el arreglo se tiene que y son segmentos paralelos, con ello se logra pares de triángulos semejantes. Haciendo uso de la proporcionalidad de sus lados homólogos para cada caso, se verifica que el producto de y es el segmento . A dicho algoritmo lo denominamos *criterio de la semejanza.*

Figura 3. Criterio de semejanza para *b* mayor que la unidad



Fuente: *Elaboración propia*

Figura 4. Criterio de semejanza para *b* menos que la unidad



***Fuente**: Elaboración propia*

La justificación de ambos criterios para operar números —en este caso magnitudes de segmentos— se fundamenta geométricamente. Para el *criterio de la media geométrica* se pone énfasis en el concepto de semejanza entre triángulos rectángulos y en la igualdad o equivalencia de sus lados (es decir, la razón entre sus lados homólogos). Para el *criterio de semejanza* se basa en proporciones que son igualdad de razones. Pero no basta con entender eso. Si se quedan a nivel exclusivamente operatorio o algorítmico, se restringirá la construcción de un significado que, veremos, resulta fundamental para la comprensión de la función exponencial .

Profundizando aún más en la idea, se afirma que el criterio de la media geométrica no solo es un resultado algorítmico, pues en él subyacen las "prácticas" de la comparación y de la medición. La altura de la hipotenusa es un segmento, por lo tanto, tiene magnitud y esta es susceptible de medirse. Para lograrlo, hay que construir una unidad de medida, dicha unidad de medida es el 1 en la figura. El establecimiento de la unidad de medida es requisito indispensable para establecer la medida de la altura.

En el criterio de la semejanza se usan las razones de sus respectivos lados homólogos que están sujetos a una práctica de *comparar* y luego a la de *medir*. Galo (2019, p.235) señala que la comparación en la geometría de Euclides es una praxis recurrente, por lo que puede considerarse que la identificación de relaciones dadas permite encadenar comparaciones para establecer que las relaciones entre sus elementos (en nuestro caso, rectas) sean de igualdad, desigualdad o equivalencia.

Cantoral, Montiel y Reyes (2015) señalan que, desde la perspectiva del programa socioepistemológico, se promueve el desarrollo del pensamiento matemático sobre la base de prácticas que están asociadas a acciones y actividades en contextos determinados. Para nuestro caso, el geométrico y numérico, pues para el caso de la media geométrica si, entonces la altura será y si , entonces, la altura será.

Al regresar al tema de los niveles de reproducibilidad señalados, se tendría que decir que lograr el dominio de los algoritmos en forma operativa en los estudiantes para encontrar magnitudes de segmentos sería un ejemplo característico de reproducibilidad externa. Construir la idea de que son una herramienta útil, en nuestro caso, para la medición, es decir darle un valor de uso a la medición caería en el nivel de reproducibilidad interna. Poniendo atención en este punto, podríamos aducir que el papel desempeñado por el profesor es apoyar a los estudiantes a alcanzar estos dos niveles, lo que comporta una figura del profesor como coadyuvante de la construcción de significados.

El profesor que ha alcanzado problematizar dicho conocimiento planteado en la situación y que logra remontar con sus estudiantes el aspecto algorítmico (alcanzando a construir su significado como herramienta de medición) está logrando establecer una nueva y potente relación con el conocimiento matemático. Acorde con el desarrollo profesional docente, construido desde el enfoque de la socioepistemología, es un profesor en proceso de empoderamiento (Reyes-Gasperini, 2016a, p.26): no es conocer más, es poner en uso lo que se conoce; dicho de otra manera, es alcanzar el saber.

Como paréntesis de la discusión, anticipamos que lo que buscamos comunicar en este escrito en relación con la noción de desarrollo profesional docente del profesor de matemáticas es que no basta con conocer más matemática, sino que hay que problematizar la que se conoce y lo que dicta el currículo para producir un rediseño del discurso matemático escolar.

2.5 Hacia la construcción de la exponencial 2^x

Observar la presencia de las prácticas de comparar y medir y ponerlas en uso, es resultado de la problematización del saber que, para el caso de la situación que estamos revisitando, posibilita dotar de significado a un comportamiento numérico y relacional asociado con la noción de función exponencial, como se discutirá más adelante.

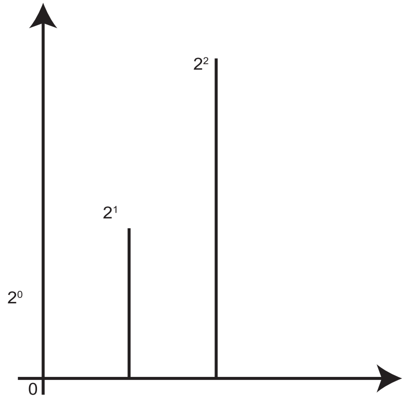
En la segunda parte de la secuencia que discutimos se emplean los algoritmos o procedimientos de la media geométrica y la semejanza. La tarea que se propone es ubicar seis puntos en el plano cartesiano correspondientes al trazo de la gráfica de la función 2x restringidos al intervalo [0,2].

2.6 Construcción geométrica

Se han trazado los segmentos de magnitudes 2^0, 2^1 y 2^2 que nos sirven de guía para ubicar los puntos $(0,2^0)$, $(1, 2^1)$ y $(2, 2^2)$. A los estudiantes se les solicita localizar los puntos $(½, 2^{½})$, $(¼,2^{¼})$, $(¾, 2^{¾})$, $(5/4,2^{5/4})$, $(3/2, 2^{3/2})$ y $(7/4, 2^{7/4})$ y para ello deberán obtener los segmentos de magnitudes $2^{¼}$, $2^{½}$, $2^{¾}$, $2^{5/4}$, $2^{3/2}$ y $2^{7/4}$, empleando únicamente procedimientos geométricos. Además, se les pregunta si es posible localizar el punto $(1/8, 2^{1/8})$, y si es posible obtener más puntos siguiendo este procedimiento.

Como se puede observar, en la Figura 5 se dan tres segmentos indicando sus magnitudes por , sin marcar las coordenadas. El propósito de la actividad es que se sigan trazando segmentos, no el cálculo de las potencias de 2. Se espera que el estudiante identifique la unidad en la figura para tomarla como referencia y utilizarla en los respectivos algoritmos a fin de encontrar los segmentos cuyas magnitudes se indican.

Figura 5. Ejes e información de referencia



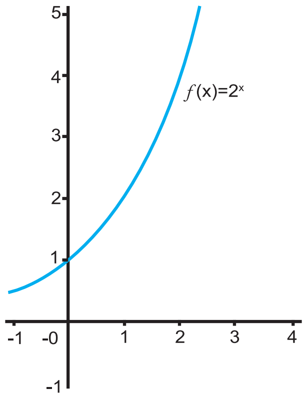
Fuente: *Elaboración propia*

2.7 Discusión de la actividad

En la Figura 5, mirándola desde una perspectiva aritmética, los estudiantes saben que , y pueden generalizar el patrón algebraicamente, entendiendo que *n* es un número natural. Esa aritmética obliga a profesores y a estudiantes a responder el siguiente aspecto operativo: , ¿cómo justificar esa operación?

Los que afirman, por lo general lo recuerdan como una definición. Los que lo justifican, lo hacen vía . No es claro para algunos que y, además, tienen el problema de interpretar , lo que puede enredar la justificación. Es decir, representa un gran problema para el estudiante significarlo. Una discusión de este tema se puede leer en Martínez (2002). Con el fin de ampliar la discusión y contrastar con lo que se pide en la tarea, se agrega a la Figura 6 un trazo de la función exponencial que no está en la actividad original, tal como es común encontrarla en cualquier libro de texto.

Figura 6. Gráfico de la exponencia



Fuente: *Elaboración propia*

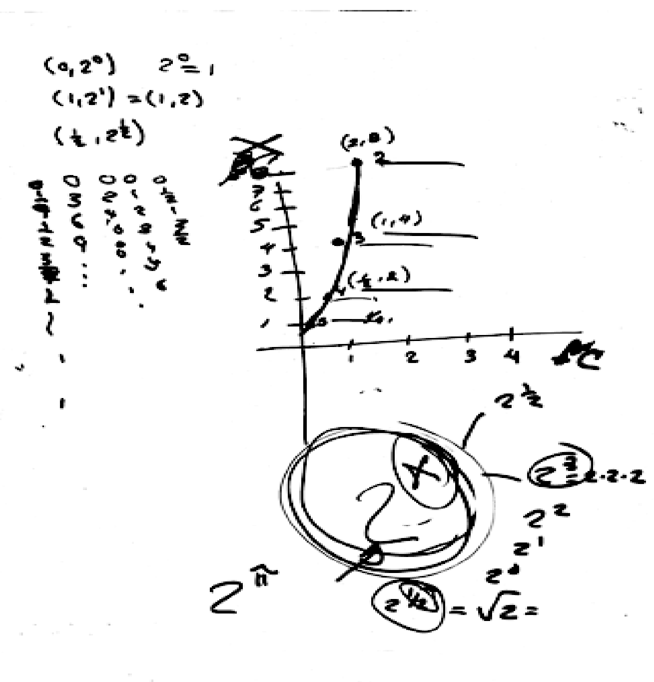
A partir de su análisis, podemos inducir de manera informal los siguientes aspectos: la función es creciente, continua; sabemos que tomando a 2 como base se cumplen con las condiciones de ser , y puede establecerse una correlación entre conjuntos de números cuya regla de relación es . A partir de dicha relación entre los conjuntos de e y pensando con una perspectiva aritmética, podemos suponer que para cualquier número que tomemos en el eje siempre es posible realizar la operación 2^x.

Esto lleva al estudiante a un alto nivel de abstracción, pues estaríamos haciendo uso de una versión escolar de continuidad que dice: "Una función es continua si su trazo gráfico se puede realizar sin levantar el lápiz del papel". Esto inducía al estudiante a suponer que siempre es factible realizar la operación siendo un número real, es decir entero, racional o irracional. Otro problema de significación lo representa efectuar la operación , el criterio de la multiplicación múltiple, como en el caso de un número *n* natural, no permite darle un significado. La exploración de la función exponencial desde el programa aritmético y algebraico limita la significación de su naturaleza (Spivak, 1970, p.424).

3. Las producciones de los estudiantes

Se observan tres producciones de equipos estudiantiles tal como se presentan en las Figuras 7, 8 y 9.

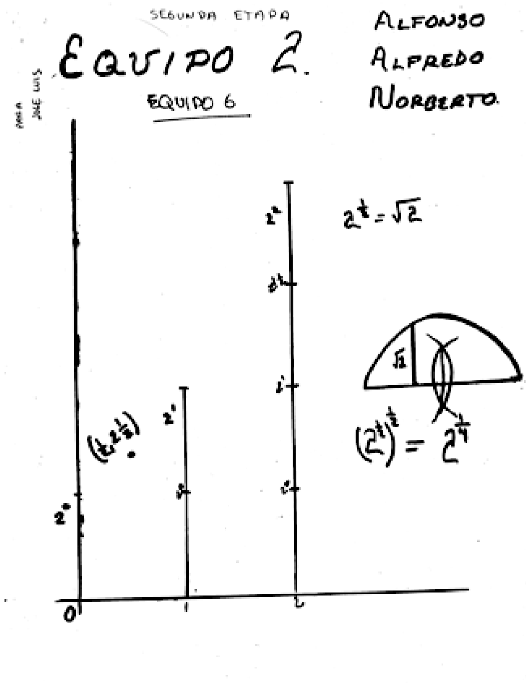
Figura 7. Tarea ejecutada por el grupo 3



Fuente: *Elaboración propia*

Se construyen pares ordenados. Se hace un trazo continuo y se colocan coordenadas sobre el trazo. No hay evidencia de qué signifiquen los demás puntos en el trazo continuo. En la parte inferior, como se muestra, es patente la búsqueda de una salida aritmética a las potencias.

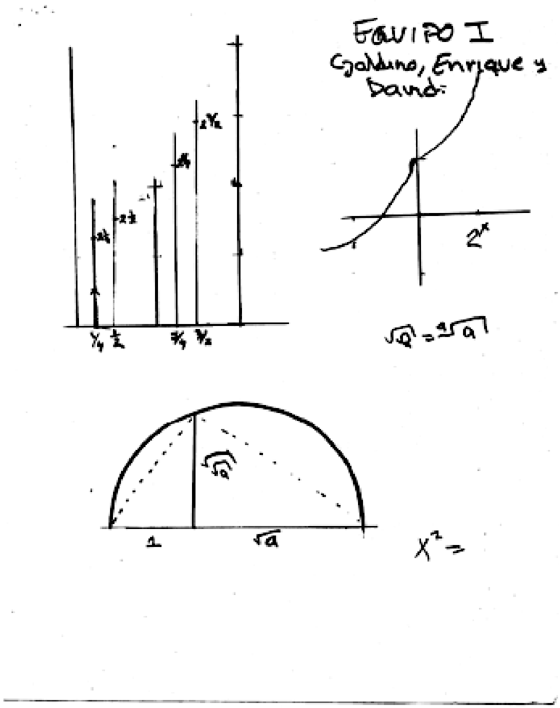
Figura 8. Tarea ejecutada por el equipo 3



__Fuente__: Elaboración propia

No hay un trazo continuo. Se interpretan las potencias desde una perspectiva aritmética. El criterio de la media geométrica les da valores, es decir, números que se traducen en coordenadas, pero no en *magnitudes de segmentos.*

Figura 9. Tarea ejecutada por el equipo 2



Fuente: *Elaboración propia*

Se dan cuenta de que el criterio de la media geométrica les da segmentos. Colocan segmentos en el plano, hecho que los hace comparables. El trazo de la función lo hacen continuo, puede ser que esté sugerido por los segmentos obtenidos. Sin embargo, en la rama derecha del eje Y sigue la lógica de los segmentos, es decir, lo sugieren. La rama izquierda del eje Y del gráfico, en la que no hay ausencia de segmentos, no proporciona una guía y, por tanto, el trazo continuo resulta erróneo.

Es importante señalar que cada equipo de estudiantes estuvo acompañado por un profesor. Los docentes, a su vez habían, participado en una larga tarea de apropiación de la secuencia trabajándola y discutiéndola en grupo con el equipo diseñador. Entre las actividades de planeación se acordó una estrategia de acompañamiento a los equipos, así como la naturaleza de las interacciones del profesor con los estudiantes, las que fueron fuertemente modificadas por los profesores. Estas se pueden conocer a profundidad en Lezama (2003, p.83).

De la discusión emprendida para este escrito, se retoma únicamente aquella conclusión que alude al desempeño de los profesores (Lezama, 2005):

> El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas; es el polo del sistema didáctico (profesor, estudiante, saber) que requiere ser más activo y flexible. Debe modificar su mirada sobre la situación didáctica, pues tendrá que reformularla para sus estudiantes y posteriormente acompañarlos cuando la trabajen. Tal dinamismo exige en el profesor habilidades que van más allá del dominio disciplinar; sin embargo, al ser tantos los aspectos que necesita cubrir, es muy fácil que falle en alguno (p.358).

En el 2005 se afirmaba que el profesor debía modificar su mirada sobre la situación didáctica a partir de una observación detallada de su interacción con los estudiantes. Se reconocía en ello un esfuerzo genuino por lograr que los estudiantes comprendieran los algoritmos de la media geométrica y de la semejanza para luego aplicarlos en la construcción de puntos pertenecientes al gráfico de 2^x. A ese esfuerzo, Balacheff (1988, pp.525-527) lo denominó responsabilidad epistemológica: un interés genuino por ayudar a que el estudiante comprenda lo que hace. Sin embargo, su esfuerzo quedó, como señala Artigue, en el plano de los procedimientos y alejado de la comprensión. Podemos mirarlo en los tres ejemplos de trabajo de los grupos que se presentaron: no se pudo alcanzar la identificación de las prácticas claves o que subyacen a los algoritmos, comparar-medir, lo que los hubiera llevado a darse cuenta de la naturaleza del crecimiento de la exponencial 2^x.

El enfoque sobre la actividad del profesor no se focaliza sobre qué le falta aprender de matemáticas, sino en cómo se relacionó con varios componentes de su entorno profesional y contextual. *Se estudió cuáles* *son las prácticas que se requieren para entender al objeto*, tal como nos dice Cantoral (Comunicación personal, 2019, agosto 23).

El programa de investigación socioepistemológico ha construido a la par de sus indagaciones un espacio de atención y acompañamiento al profesor en búsqueda de entender con detalle toda fenomenología de adquirir una nueva relación con el conocimiento matemático. A partir de esos estudios y apoyados en las categorías de la teoría socioepistemológica de Reyes-Gasperini (2016a; 2016b, p.189), se ha construido el concepto de empoderamiento docente, hecho que se discute en la segunda parte de este escrito.

3.1 Empoderamiento docente: sus ideas principales

La postura reconoce la importancia del cambio de relación con el conocimiento matemático escolar, como un elemento clave en el proceso de desarrollo profesional docente. Su fundamento teórico y pragmático se sostiene en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, la que ha permitido construir la noción de empoderamiento docente. Uno de los hechos más importantes que se ha vivenciado y evidenciado en el marco del trabajo colaborativo con los colegas profesores es el que se produce en el interior y entre los equipos, lo que habitualmente se denomina *formación de formadores*.

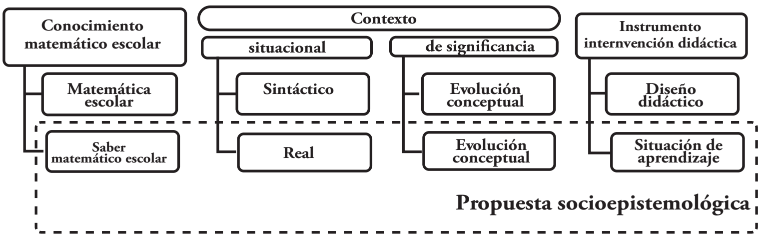
Ciertamente, se ha adoptado una postura para con el grupo de colegas profesores con quienes se trabaja, pero la idea de hablar de formación no cabe en este caso, por eso la aclaración de que así es como *habitualmente* se denomina. Desde la perspectiva del proceso de empoderamiento docente, no se podría decir que "hay empoderados que empoderan", más bien se habla de un grupo de especialistas, cada uno en distintos ámbitos, que se reúnen para dialogar y construir estrategias que mejoren la educación, en particular, el área de matemáticas. Es decir, uno de los equipos que integran este diálogo tiene un objetivo, un faro claro, al cual buscan arribar y construyen una propuesta de ruta hacia él. En palabras teóricas, el faro es el cambio de la relación con el conocimiento matemático escolar y la ruta, su problematización. Sin embargo, no hay un solo camino, son múltiples y se construyen a partir de la problematización y dependen de las personas con quienes se interactúa: sus cuestionamientos, sus reflexiones, sus dudas, sus certezas, sus contextos, etc.

En el ejemplo que se discute a continuación se evidencia un proceso en el que se problematizó la matemática escolar relativa a la proporcionalidad directa. Para ello, con base en una situación de aprendizaje, que puede revisarse a profundidad en Reyes-Gasperini (2016a, pp.164-170), se propuso la reflexión detallada sobre la construcción de la razón como elemento para analizar la proporcionalidad.

3.2 Fundamentos de una situación de aprendizaje basada en prácticas

La propuesta socioepistemológica de una situación de aprendizaje se caracteriza principalmente en el trabajo con el *contexto situacional* real y el *contexto de significancia* basado en una evolución pragmática tal como se muestra en la Figura 10. El primero se refiere al escenario en el cual se enmarcan las actividades que se deben cumplir en la situación y el segundo, a la esencia matemática que se pondrá en juego, es decir, la evolución pragmática.

Figura 10. Propuesta socioepistemológica de una situación de aprendizaje



Fuente: *Reyes-Gasperini (2016b)*

Quienes están inmersos en un proceso de empoderamiento docente podrán interpretar que la esencia de la situación de aprendizaje radica en su contexto de significancia basado en la evolución pragmática y podrán efectuar nuevos diseños que modifiquen su contexto situacional. Lo importante es reflexionar sobre la necesidad de mantener el fundamento epistemológico de la situación, es decir, su contexto de significancia con el fin de propiciar la construcción social del conocimiento matemático basado en prácticas. La situación de aprendizaje que se va a discutir está conformada por una secuencia de tres etapas:

La *primera etapa* se sustenta en que lo proporcional será manifestado como una noción intuitiva en el pensamiento humano (pensamiento cualitativo), carente de argumentaciones numéricas. Por ello, el trabajo se realizará con imágenes pictóricas que provienen de enunciados para abordarse en educación básica, y su reflexión se encaminará a lo relacional. Las relaciones serán establecidas mediante características cualitativas al nivel de comparación de tamaños o formas. Se trabajará con las relaciones cualitativas de las magnitudes hasta establecer un patrón, numérico o no, que permita caracterizar la relación.

Las tareas de la *segunda etapa* parten de haber explicitado la noción intuitiva respecto a *lo proporcional* que ha invitado a que el descubrimiento del patrón sea intrínseco en la etapa previa. En este momento se buscará su evolución hacia la noción relacional argumentada, es decir, se trabajará con la evolución pragmática de *comparar-equivaler-conmensurar*, en particular con la dupla acción-actividad: *comparar-equivaler*. Y se trabajará en el tránsito entre la característica de la relación que se enmarca en la idea de que lo que ocurre en una de las variables deberá ocurrir en la otra (*razonamiento inter*), hacia la idea de caracterizar el tipo de relación que existe *entre* dichas variables (*razonamiento intra*). En este tránsito aparecerá el concepto de *constante de proporcionalidad - razón de cambio*, numérica o no, como noción matemática principal de lo proporcional, pero, sobre todo, como *relación adecuada entre las magnitudes.*

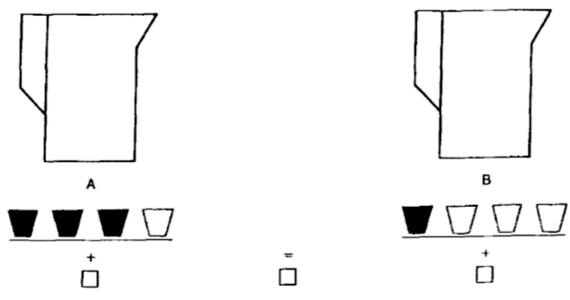
Para finalizar, habiendo transitado por la noción intuitiva y la noción variacional de *lo proporcional*, en este nivel se establece la necesidad de sintetizar la idea a través de *la noción métrica de lo proporcional.* Esto bien podría reducirse al nivel de simbolización de la proporcionalidad mediante múltiples elementos que caracterizan al objeto matemático instituido en las unidades temáticas del currículo (regla de tres, proporciones, recta que pasa por el origen, , entre otras), pero lo que se pretende, concibiendo lo realizado en las etapas previas, es alcanzar el conjunto de elementos que caracterizan a *lo proporcional*, es decir, la noción de justicia, de equidad, de establecer una relación adecuada entre las variables puestas en juego y desde allí, establecer procedimientos para su cuantificación, esto es, su evolución pragmática. En este momento, habremos de resignificar las nociones construidas en las etapas precedentes con el fin de centrar nuestra atención en las características de la relación establecida y su métrica.

Los lectores pueden encontrar en esta descripción, no solo un enunciado bien formulado, sino los fundamentos prácticos que subyacen a la escritura de dicho enunciado. Más allá de la buena pregunta, que en terminología mayéutica permite a los estudiantes "sacar su conocimiento", en esta descripción nos encontramos con la estructura base que permite formular enunciados que propicien acciones específicas en el quehacer del estudiantado.

En las tareas de la situación que transitan de la etapa segunda a la tercera se encuentra un enunciado que se rediseñó de la propuesta realizada por Noelting (1980a, 1980b) sobre la toma de decisión entre jarras de jugo con distintos concentrados. Específicamente, el enunciado de la tarea que estaba dividida en tres partes fue el siguiente:

Parte A. Dadas dos jarras para hacer agua de sabor, se les vierten diferentes concentraciones de jugo y agua. Se quiere saber cuál de ellas tiene el sabor más fuerte a naranja, o bien, si ambas tienen igual sabor.

Por ejemplo:



a. ¿Cuál de las dos jarras tendrá el sabor a naranja más fuerte?
b. ¿Por qué?

Parte B. Considerando que cada par ordenado representa a una de las jarras (izquierda jarra A, derecha jarra B), siendo la primera componente la cantidad de vasos de jugo y la segunda componente la cantidad de vasos de agua, elige cuál de ellas tiene mayor sabor a naranja, o bien, si ambas tienen igual sabor (la tabla con los pares ordenados no se coloca en esta sección).

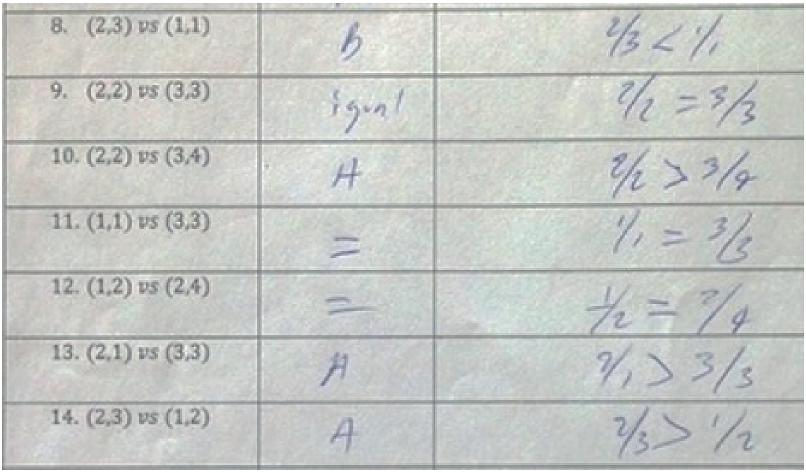
Parte C. A continuación, algunos ejemplos de respuestas obtenidas por otros individuos.
Enuncie si la respuesta es matemáticamente correcta y argumente por qué.
Explique cuál es el origen de la argumentación dada por la persona.
Jerarquice cada una de las respuestas y argumente con base en qué elementos fue realizada dicha jerarquización.

Durante el diseño de la tarea, como parte de la situación, y en su análisis a priori, no se había planteado a la gráfica como un posible argumento. He aquí el momento en el cual la problematización de la matemática escolar a partir de la vivencia de una situación de aprendizaje toma caminos que conducen al faro, aunque no hayan estado planeados. En este momento, quien está facilitando la interacción debe tener la soltura para dejar vivir el argumento, entenderlo, discutirlo y potenciarlo. Así se logra entender que un proceso de empoderamiento docente es un aprendizaje dialéctico.

3.3 Un episodio de problematización de la matemática escolar

Es oportuno estudiar qué fue lo que ocurrió. En la Figura 11 se muestra la tabla que se proponía en la parte B de la tarea mencionada en el apartado anterior, junto con las respuestas dadas por uno de los profesores que interactuó en el proceso de empoderamiento.

Figura 11. Respuestas de los docentes que participaron en el proceso de empoderamiento



8. (2,3) *vs* (1,1)	B	$2/3 < 1/1$
9. (2,2) *vs* (3,3)	igual	$2/2 = 3/3$
10. (2,2) *vs* (3,4)	A	$2/2 > 3/4$
11. (1,1) *vs* (3,3)	=	$1/1 = 3/3$
12. (1,2) *vs* (2,4)	=	$1/2 = 2/4$
13. (2,1) *vs* (3,3)	A	$2/1 > 3/3$
14. (2,3) *vs* (1,2)	A	$2/3 > 1/2$

Fuente: *Elaboración propia*
Nota*. Comparación de razones en las partidas.*

Se analiza una significación que el profesor formula sobre el concepto de *razón* mediante la evolución de las argumentaciones desde una explicación basada en las prácticas hasta llegar a la justificación matemática formal (nótese en la Tabla 1).

Tabla 1. Resignificación de la idea de razón por parte de los profesores

Intervención del profesor	Interpretación y análisis
Yo puse que tienen la misma razón.	Esta fue la respuesta concreta de Óscar, tras argumentar a un nivel inicial.
La relación de cantidad del agua y de jugo es la misma: uno de jugo y dos de agua.	Las magnitudes son contextuales en la situación: “cantidad de agua y cantidad de jugo que explica la idea de una misma razón”; afirmando que esta es una relación entre las cantidades de las magnitudes enunciadas.
O sea, uno-dos y la otra es dos-cuatro . O sea, uno-dos, lo veo como un medio.	La primera estrategia fue construir razones/relaciones a partir del contexto . Luego, la estrategia fue comparar numéricamente las razones para lo cual usó el argumento de “ver a las razones como fracciones”. La frase “lo veo como” es un indicio de que las significaciones que les da a la razón y a la fracción son diferentes. Es decir, luego de darle un significado a la idea de razón, se procede a aritmetizar la razón para operar.
Dos cuartos, pues es un medio, entonces tiene la misma… la relación entre las dos cantidades es la misma.	Significa la idea de razón y usa la igualación de las fracciones para armar una proporción y concluir en que la relación entre las dos cantidades es constante, lo cual da significado a la noción de constante de proporcionalidad que emerge de la proporción armada. Este puede considerarse el argumento matemático formal de su primera afirmación.

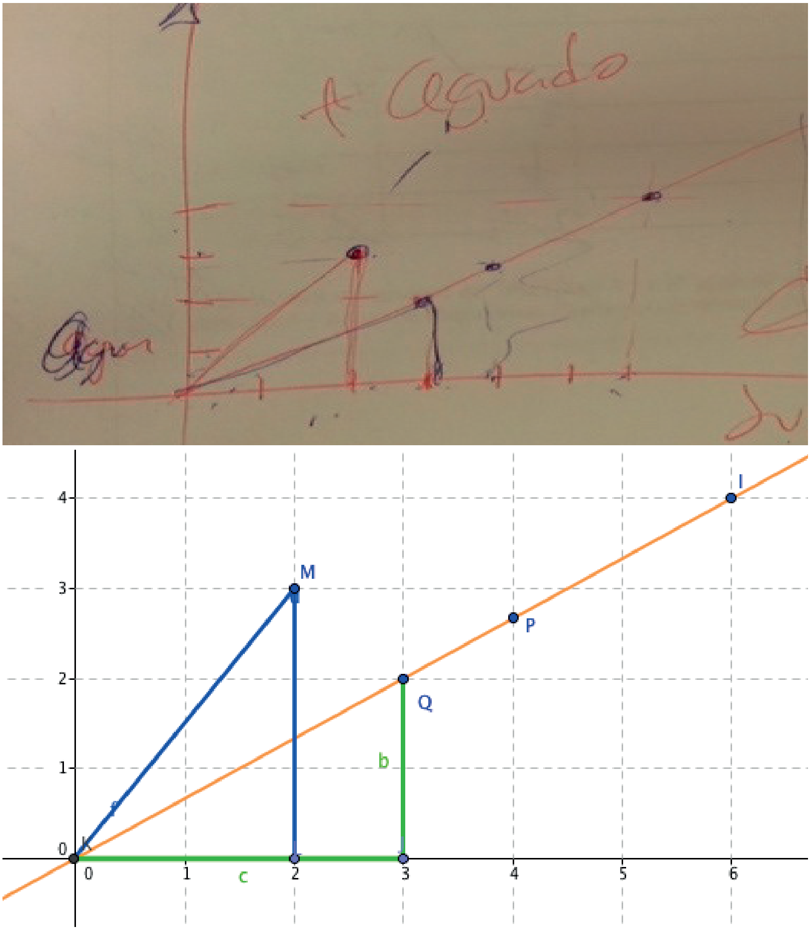
***Fuente**: Elaboración propia*

La interacción continúa con la afirmación del profesor respecto a la razón: “porque no lo veo como un número, sino como una relación”, a lo cual otra colega le responde: “como una relación sí, pero como un número no podría ser”.

Este hecho, demuestra cómo vive en los profesores la *aritmetización de la proporcionalidad* confrontada con la idea de razón como relación entre magnitudes, es decir, *lo proporcional*. Podemos conjeturar que este momento en la *proporcionalidad aritmética* se ve a la relación entre las cantidades como una *fracción*, mientras que en la *proporcionalidad variacional* se la ve como una *razón*.

El profesor argumenta, en un inicio, que los sabores de las jarras son iguales porque tienen la misma razón. Al interpretar la evolución de sus argumentaciones observamos cómo su afirmación surge de localizar que *la relación entre la cantidad de agua y de jugo es la misma*. Es decir, *habla del mismo sabor* como la relación entre dichas cantidades *para justificar la igualdad numérica* de las razones (la proporción), en otras palabras, *el invariante es el sabor.* Con la argumentación de *comparar* las razones, válida matemáticamente, el profesor respondió de manera correcta y rápida a la mayoría de las partidas que se habían propuesto, Sin embargo, luego de dialogar sobre diversas estrategias, el profesor propuso una nueva, cuyo argumento fue la gráfica. En la Figura 12 se indica el trabajo del profesor al comparar dos jarras inventadas por él mismo. *A* la izquierda se encuentra el diseño del profesor; a la derecha, la reconstrucción hecha por nosotros.

Figura 12. Trabajo del profesor al comparar las dos jarras del ejercicio planteado

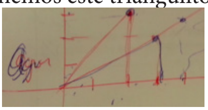


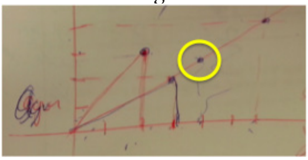
Fuente: *Elaboración propia*

Profesor: *Las gráficas también nos podrían servir… Suponiendo que… en la primera que era tres… puse aquí una gráfica que en las X es el jugo y la Y el agua. Entonces, puse que tres de jugo con dos de agua , ponemos este triangulito… y se supone que van a tener lo mismo si pusiera cuatro de jugo… no sé cuánta agua tendría… eso tendría lo mismo, la misma cantidad de jugo… Si pongo seis de jugo con cuatro de agua, esto, esto que prepare aquí va a tener lo mismo… entonces todo* *lo que esté sobre esto (indica la recta) van a tener el mismo sabor y la misma porción de jugo con agua. Pero si se pasa, si queda arriba, ya va a saber más a agua, como es el caso de que, si fueran, aquí dos de jugo con uno, dos, tres de agua. Al estar acá arriba está más aguado. Entonces, para que sepa más a jugo, tiene que estar de aquí para abajo. Y si queda por arriba, queda más aguado.*

A continuación, se presenta la Tabla 2.

Tabla 2. Resignificación de la idea de razón de cambio por parte de los profesores

Intervención del profesor	Interpretación y análisis
Las gráficas también nos podrían servir… Suponiendo que… en la primera que era tres… puse aquí una gráfica que en las X es el jugo y la Y, es el agua.	Expone su nuevo argumento e identifica los elementos de la gráfica de la cual hará su análisis: eje X y eje Y.
Entonces, puse que tres de jugo con dos de agua , ponemos este triangulito… 	El “triangulito” del que habla está pintado de color azul y se refiere a la razón de cambio (lo cual se había discutido previamente) que compara el cambio en las Y (agua) respecto con el cambio en las X (jugo).
Y se supone que van a tener lo mismo.	“Lo mismo” se refiere a la relación entre el jugo y el agua y tiene intrínseca la noción de igualar o equivaler, a la vez que “lo mismo” significa “el mismo sabor”.

Intervención del profesor	Interpretación y análisis
Si pusiera cuatro de jugo… no sé cuánto de agua tendría… eso tendría lo mismo, la misma cantidad de jugo… Si pongo seis de jugo con cuatro de agua. 	Dado que la relación de agua a jugo es de 2 a 3, cuando el profesor ejemplifica cuánto le correspondería a 4 de jugo dice “no sé cuánta agua tendría”, pues no son números que permitan ningún razonamiento simple: aditivo simple, multiplicativo, inter ni intra. Aritméticamente sería: . Sin embargo, de lo que él sí está seguro es de que esa relación estará sobre la recta porque tiene el mismo sabor y lo marca (en la imagen se indica con un círculo amarillo). Es decir, la equivalencia se puede hacer aun sin conocer el valor numérico. Luego, cuando dice para 6 de jugo, inmediatamente afirma 4 de agua, pues podríamos asumir que usó un razonamiento inter: doble de jugo, doble de agua.
Esto, esto que preparé aquí va a tener lo mismo… entonces todo lo que esté sobre esto (indica la recta).	La recta ya no se considera una representación (una nueva presentación de lo que ya se tenía), sino que ahora es un dato en sí mismo que da información.
Van a tener el mismo sabor.	Que esté en la misma recta (pasando por el origen) significa que tienen el mismo sabor, es decir, significa la noción de pendiente de una recta proporcional a partir de la noción de sabor.
La misma porción de jugo con agua.	m es interpretado como “sabor”, y este será igual siempre que tenga la misma relación (comparar) de jugo con agua. No precisa de la interpretación numérica, sino que habla de la relación entre las magnitudes.
Pero si se pasa, si queda arriba, ya va a saber más a agua, como es el caso de que, si fueran aquí dos de jugo con uno, dos, tres de agua. Al estar acá arriba está más aguado. Entonces, para que sepa más a jugo tiene que estar de aquí para abajo. Y, si queda por arriba, queda más aguado.	La recta como gráfica toma significado a partir del análisis. Se hace una lectura del plano cartesiano completo a partir de la posición de la recta: más aguado arriba, más sabroso abajo.

Fuente: *Elaboración propia*

La relación que presenta el profesor es una representación gráfica (recta) que indica el *sabor* y separa al plano cartesiano en regiones correspondientes a *intensidades de sabor*. Es decir, a partir de la noción de sabor se significó la idea de recta que pasa por el origen como la representación de una función de proporcionalidad directa. Nótese que el dominio usado por el profesor no incorpora a los negativos, pues está graficando explícitamente la situación contextual. La idea de que "pase por el origen" garantizaba que el sabor fuera el mismo para cualquier punto de la recta, ya que el sabor se obtenía como la relación , es decir, la razón entre la cantidad de jugo y la cantidad de agua. Así mismo, a partir de la ubicación de un punto en el plano pudo comparar la *intensidad del sabor*. En este caso, se significa a partir de la noción de*sabor*, mientras que en la matemática escolar es presentada como única, numérica y estática:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x}$$

Posterior a esta reflexión, los colegas continuaron poniendo a prueba la estrategia construida a partir de la gráfica como argumento. Las partidas que antes se dificultaban, por ejemplo (3, 2) y (4, 3), ya no eran un problema. Así se entendió cómo se pasó de una relación aritmética con lo proporcional hacia una relación variacional donde la razón, como relación entre las magnitudes, toma un protagonismo indispensable para darle sustento a lo proporcional. Para terminar la tarea se dialogó sobre otro ejemplo, el caso de la relación entre distancia y tiempo, y quedó graficada la velocidad. Ahí se analizó que cuanto más cercana al eje *Y* estuviera la gráfica, mayor sería la velocidad. Este episodio concluyó con el siguiente diálogo reflexivo:

Profesora:	En estadística hay una, ¿no? ¿Cómo era? La curva de la campana… ¿podría ver eso? La relación.
Investigadora:	Todos los puntos están hablando de las relaciones. Entonces, lo que está acá graficado no es el agua, no es el jugo, es la relación entre esas dos. Por eso es que la función cuyas variables son estas… Pero la función habla de la relación entre las variables.
Profesor:	Sí. Como que se acostumbra uno a verlo por separado.

La profesora explicita la idea de la relación y el profesor cuestiona aquello a lo que uno está acostumbrado en las funciones: ver las magnitudes por separado, pues la idea no es ver ni el jugo ni el agua, sino la relación entre ellos. Este hecho explica empíricamente la necesidad de comenzar por identificar y comparar magnitudes para establecer una relación, como se propuso en la etapa factual, pues existe la dificultad de mirar ambas magnitudes relacionadas.

3.4 Un aprendizaje mutuo

Tras la interacción, la investigadora diseñó una nueva situación de aprendizaje que pudiera confrontar de manera gráfica una relación lineal proporcional y una no proporcional, a partir de la significación de la razón de cambio y la razón entre las variables.

De la situación de aprendizaje titulada "Las mezclas", retomaremos preguntas específicas que son de interés para este escrito (Figura 13).

Figura 13. Enunciado de la tarea diseñada a posteriori

Tarea 1. Un barril grande de color azul tiene la siguiente mezcla:

Por cada tres litros de agua se colocan dos litros de concentrado de naranja, la cual se repartirá en dos *vitroleros* pequeños.

Para llenar los vitroleros se usa un ***medidor*** de un litro con el que se toma el preparado del barril grande. (Considérese el preparado con una distribución homogénea).

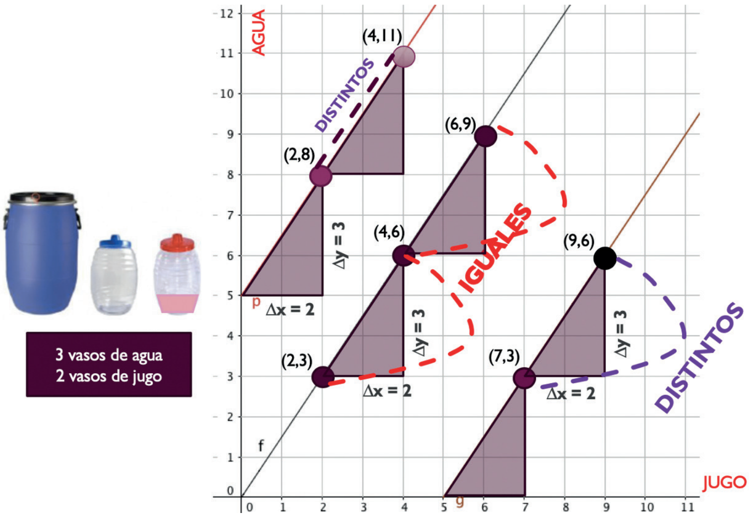
a. ¿Qué proporción del litro será de concentrado de naranja? Explique su respuesta.

b. En el vitrolero de tapa azul, que estaba vacío, se coloca 20 veces el contenido del *medidor* y se llena. En el vitrolero de tapa rojo sólo se llega a colocar 15 veces el contenido del *medidor* hasta llenarse. Si ambos vitroleros tienen la misma capacidad, ¿cuáles pueden ser los motivos por los que se llenó antes uno que otro?

Fuente. *Elaboración propia*

En este caso, la primera etapa propone realizar el experimento de explicar de manera contextual los motivos por los cuales el vitrolero rojo pudiera llenarse con menos cantidad de medidores. Uno de los argumentos más comunes es suponer que tenía antes algún líquido dentro (agua, concentrado de naranja o mezcla). Cuando los participantes que viven la situación comienzan a reproducir las acciones que se precisan para "ir llenando los vitroleros", comienzan a significar ciertos elementos: "el medidor" siempre es el mismo, es el que se mantiene invariante, sin importar si el vitrolero rojo tenía agua, concentrado o mezcla (razón de cambio constante en cualquier relación lineal, proporcional y no proporcional); el sabor se va modificando en el caso de que el vitrolero rojo contuviera agua o concentrado (razón entre variables variante en una relación lineal no proporcional), pero no se modifica si comienza a llenarse con la mezcla (razón entre variables constante en una relación lineal proporcional), como explica la Figura 14.

Figura 14. Representación gráfica de la situación planteada



Fuente: *Elaboración propia*

El objetivo de esta situación, la cual surge como reflexión colegiada durante un proceso diseñado para propiciar un cambio de relación con el conocimiento matemático, es que los participantes puedan significar que lo que caracteriza a una relación lineal proporcional no es la razón de cambio constante (pues eso caracteriza a cualquier relación lineal), sino la relación constante entre la razón de sus variables. Para ello, tal como dijo el profesor durante la problematización, es indispensable que se reflexione sobre una mirada variacional de lo proporcional y no que se quede en una mirada aritmética.

¿Qué es lo relevante de todo este apartado? Que al final de las vivencias y las evidencias no hay empoderados que empoderan, sino hay colegas que se encuentran, dialogan, problematizan y aprenden de manera dialéctica, de eso se trata el empoderamiento docente.

4. Conclusiones

Se ha discutido, a partir del concepto de reproducibilidad de situaciones de aprendizaje, situaciones que escolarmente pueden ser muy variadas, desde la repetición de una misma explicación o tareas operativas centradas en prácticas algorítmicas hasta situaciones estructuradas de manera robusta y fundamentadas en teoría. Todas ellas enfrentan, desde un enfoque teórico, la dificultad de repetir o reproducir el logro didáctico que se propone en cada uno de los escenarios donde se trabaja. La reproducibilidad de efectos didácticos estables y generalizables devienen en ilusión si no se pueden garantizar los dos niveles de reproducibilidad. El logro en la repetición de procedimientos puede ser bastante estable, pero esto puede alcanzarse con el costo de una pobre o nula construcción de significados que ninguna experiencia posterior le permita resignificar.

La búsqueda de reproducibilidad interna con significados o, podríamos decir rica en significados, es difícil o imposible de repetir, o mejor dicho requeriría de más indagación y nuevas formas de investigar como propone Artigue. En la discusión del ejemplo de lo exponencial, se evidencia que a un maestro, por inercia escolar o como resultado del discurso escolar preponderante, le cuesta trabajo problematizar las matemáticas que saben y discuten con sus estudiantes, vive una dinámica ausente de las prácticas fundacionales de eso que enseña.

Por otra parte, en el ejemplo discutido sobre lo proporcional, se da cuenta de la reproducibilidad interna, en palabras de Artigue (2018, p.25), o invariancia del contexto de significancia, en palabras de Reyes-Gasperini (2016a, p.58). La reflexión sobre el ejemplo del sabor es un ejemplo interesante y profundo de cómo el profesor y, desde luego, sus estudiantes en un contexto material que posibilita significados de manera concreta, pueden plantear nociones y prácticas con leguaje distinto, pero esclarecedor y con mucho sentido, está en el camino de ir reconstruyendo, dependiendo de las necesidades prácticas. Si entiende la idea del sabor, puede ir entendiendo cuándo este cambia, y sabe qué es lo que está cambiando y podrá representar gráficamente el complejo y abstracto objeto matemático, y ya podríamos decir está encarnado en lo que hace y la forma que lo piensa.

Tendrá una nueva alternativa de guía aquel profesor que, sin temor a la pérdida de los formalismos y discursos impuestos, explore prácticas, las aplique y las haga vivir a sus estudiantes. Así estará construyendo una nueva relación con el conocimiento y, por tanto, estará en proceso de empoderamiento. Este concepto es al que nos comprometemos estudiar con mayor profundidad.

Se ha colocado al docente en el centro de esta discusión y se ha introducido el enfoque socioepistemológico (centrado en prácticas) por ser el elemento material de la construcción del conocimiento matemático. Una reflexión a partir de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza es, entonces, que un elemento característico que evidencia al proceso de empoderamiento docente es darse cuenta y considerar como fundamental la reproducibilidad interna.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Thèse d'Etat (première partie). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250658/document

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2018). Didáctica matemática y reproducibilidad. *Educación Matemática*, *30*(2), 9-32. DOI: 10.24844/EM3002.01

Balacheff, N. (1988). *Étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*.Thèse de doctorat d'état és-sciences didactique des mathématiques. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Biesta, G. (2010). Why 'What works' still won't work: From evidenced-based education to value-based education. *Studies in Philosophy of Education, 29*, 491-503.

Bourdieu, P. (2003). *Cuestiones de sociología*. Ediciones Istmo.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(1), 37-128.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-112.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-7. DOI: 10.12802/relime.13.1810

Galo, S. (2019). *El estudio del cambio en Geometría Euclidiana* [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas* [Tesis de Doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 339-362.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(1), 45-78.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem-structure at successives stages. Problem-solving Strategies and the Mechanism of Adaptative Reestructuring. *Educational Studies*

in Mathematics, 11(3), 331-363.
Reyes-Gaperini, D. (2016a). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y mejora educativa* [Tesis de Doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
Reyes-Gasperini, D. (2016b). *Empoderamiento docente y socioepistemología: un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas*. Editorial Gedisa.
Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525-1544.
Wiseman, A. (2010). The uses of evidence for educational policy making. Global contexts and international trends. *Review of Research in Education*, *34*(1), 1-24.
Spivak, M. (1970). *Cálculo infinitesimal.* Editorial Reverté.