Los puentes de Königsberg, una puerta al razonamiento matemático

The bridges of Königsberg, an initiation of mathematical reasoning.

Fabián Andrés Bravo Vaca, (Euler, 1736)
Universidad Central del Ecuador
fabravov@uce.edu.ec

Ariel Ismael Tacuri Valencia
Universidad Central del Ecuador
aitacuri@uce.edu.ec

Resumen

El presente estudio pretende entender mediante el uso de GeoGebra, los modelos matemáticos que describen situaciones reales, analizando el problema de los puentes de Königsberg, el cual consiste en cómo cruzar cada uno de los siete puentes que conectan cuatro islas sin recorrer un mismo puente dos veces. Este problema se modela mediante un grafo, a partir del cual deducimos resultados, que resuelven el problema y con ello obtenemos una regla generalizada motivada por el razonamiento lógico que nos permita afrontar algunos problemas similares, pero más complejos.

Palabras clave: Königsberg, grafos, camino, matemática, pedagogía.

Abstract

The present study aims to understand, through the use of GeoGebra, the mathematical models that describe real situations, analyzing the problem of the Königsberg bridges, which consists of how to cross each of the seven bridges that connect 4 islands without crossing the same bridge twice. times. This problem is modeled by means of a graph, from which we deduce results that solve the problem and thereby obtain a generalized rule motivated by logical reasoning that allows us to face some similar but more complex problems.

Keywords: Königsberg, graphs, path, mathematics, pedagogy.

Antecedentes históricos

Konigsberg era una ciudad que se situaba en la actual Rusia, cuyo territorio se conoce ahora como Kaliningrado, y se adoptó este nombre en 1947, un año después de que este territorio pase a manos de la antigua URSS. En el siglo XVII Konigsberg estaba atravesada por el río Pregel, que se dividía en el viejo y el nuevo Pregel.

Para unir las cuatro partes de la ciudad separadas geográficamente, existían siete puentes. Se cuenta que en los domingos y en los días de fiesta los habitantes de la ciudad solían entretenerse intentando resolver el siguiente problema: ¿Es posible recorrer las cuatro partes de la ciudad, atravesando todos los puentes, una y una sola vez cada uno de ellos?

Había dos grupos de personas, las que creían que era imposible hacer un recorrido de esa forma, y otros que dudaron sobre aquello. Ante esta situación, un comité de jóvenes de la ciudad acudió en 1735 a Leonhard Euler para pedirle que resolviera aquel entretenido problema. (Valdés, et al., 2004)

Este problema requería una *nueva geometría.* En palabras de Leibniz sobre la matemática de aquella época:

> No estoy contento con el álgebra, pues no da ni los medios más cortos, ni las más bellas construcciones de Geometría. Esto es porque, cuando se trata de esto, creo que nos hace falta aún un análisis propiamente geométrico o lineal que exprese directamente el espacio al igual que el álgebra expresa magnitudes (1679).

Al pedirle a Euler que resolviera dicho problema, el respondió en una carta que este problema no tiene que ver con las matemáticas, y no sabía por qué esperaban que él como matemático lo resolviera. Euler, asigna este problema a la geometría de la posición, que probablemente es el análisis al que se refería Leibniz en su "Analysis situs" (Instituto de matemáticas de la UNAM, 2019)

Entonces, a pesar de que este problema, no era meramente matemático Euler dio su solución al problema en "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis". Dando inicio a nuevas ramas de las matemáticas tales como, la topología y la teoría de grafos. Evidenciando de esta forma, que la abstracción que brinda las matemáticas, nos permite simplificar problemas de la vida cotidiana, y esto es lo que se llama modelizar en matemáticas.

Abstracción matemática del problema

Notemos que, para este problema, aunque involucra caminos, puentes y masas de tierra, hay varios aspectos que no son relevantes para resolver nuestro problema, por ejemplo: distancias en general (entre masas de tierra, de puentes, entre puentes, tamaños, etc.). Es así como lo que realmente nos interesa son las *posiciones* de las masas de tierra y las *conexiones* entre ellos (puentes).

Llamando A, B, C, D a las masas de tierra y a, b, c, d, e, f, g a los puentes, podemos repensar nuestro problema con la siguiente figura.

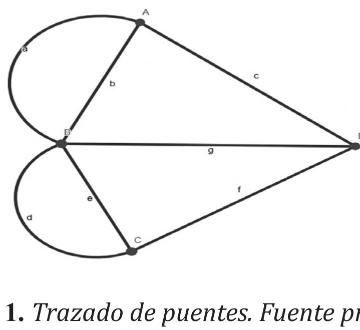

Figura 1. *Trazado de puentes. Fuente propia*

Lo que queremos es, mediante un trazo pasar por todas las aristas (puentes) una sola vez sin repasar el trazo, a este recorrido lo denominaremos camino de Euler o euleriano. Le daremos a A, B, C y D el nombre de vértices.

Tenemos en nuestro problema dos elementos (aristas y vértices), las aristas de manera individual no son muy interesantes de estudiar, puesto que en esencia son iguales (líneas que relacionan dos vértices).

Análisis de vértices con una dos y tres aristas.

Estudiaremos los vértices, los cuales se diferencian entre sí por el número de aristas que tienen y además podemos distinguir tres tipos de vértices según el momento de nuestro trazo que lo encontremos: vértice inicial, vértice final y vértices intermedios.

Supongamos un vértice con una sola arista,

Figura 2. *Arista*

Notemos que es imposible que este vértice sea intermedio ya que para ello deberíamos tener al menos dos aristas, una que nos servirá para llegar al vértice y otra para continuar el camino. Sin embargo, no hay razón (relacionada con el vértice que estamos estudiando) para que el vértice en cuestión no sea nuestro punto de inicio o de final.

Lo anterior implica que, si tenemos un vértice con una sola arista, este vértice será inicial o final. Además, debido a que solo hay dos posibilidades, no se puede tener tres vértices con una arista si hay un camino de Euler.

Ahora, supongamos un vértice con dos aristas,

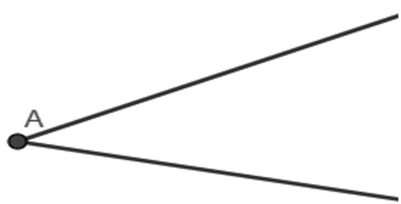

Figura 3. *Dos aristas*

No hay problema en que este vértice sea intermedio, pero no puede ser final sin ser también de inicio. En efecto, supongamos un vértice final con dos aristas, una arista se usa para terminar en el vértice debido a que es final, la otra arista debe ser usada, esta arista no puede convertir al vértice en uno intermedio ya que eso contradice el hecho de ser final, entonces queda como única opción que debido a esta arista sobrante el vértice sea inicial, el mismo razonamiento lo usamos para demostrar que un vértice no puede ser inicial sin ser final.

Supongamos un vértice con tres aristas,

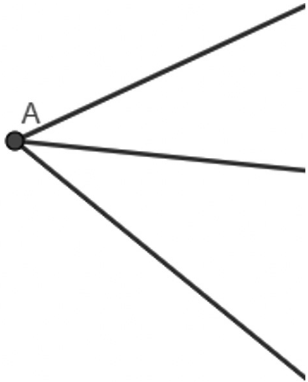

Figura 4 . *Tres aristas*

Este vértice no puede ser intermedio, en efecto supongamos que es intermedio por lo tanto una arista la usamos para llegar al vértice, otra la utilizamos para movernos al siguiente vértice, por lo tanto la tercera arista en caso de ser usada para llegar al vértice, el camino termina porque ya no tenemos más vértices para dirigirnos a otro vértice; en caso de que sea usada para salir del vértice como ya no quedan aristas que hubieran sido usadas para llegar al punto, tenemos que el camino empieza en el vértice en cuestión, haciendo que sea inicial. Por el razonamiento anterior el vértice debe ser inicial o final.

Solución al problema

Además, notemos que como solo tenemos dos posibilidades para un vértice de tres aristas (inicial o final), entonces *si tenemos tres vértices con tres aristas, no puede existir un camino de Euler.*

Con este último resultado, ya podemos dar una solución al problema de los 7 puentes, debido a que el grafo asociado al problema tiene tres vértices con tres aristas no existe un camino de Euler, es decir no es posible pasar por todos los puentes solo una vez.

Generalización del análisis

Notemos que hallamos una condición necesaria para que exista un camino de Euler. Puesto que, si juntamos las conclusiones halladas para 1 y 3 aristas, tenemos que, si el número de vértices con 1 o 3 aristas es mayor o igual a 3 no existe un camino de Euler, dicha conclusión resultante es equivalente (tomando el contrarrecíproco) a:

Existe un camino de Euler si la suma del número de vértices con 1 o 3 aristas es menor a 3. O lo que es lo mismo, existe un camino de Euler si hay menos de tres vértices con 1 o 3 aristas.

Pero debemos preguntarnos ¿Por qué 1 y 3 aristas?, ¿Son importantes o especiales el 1 y 3? La respuesta es que no. Vamos a demostrar que un vértice (en cualquier grafo) con número impar de aristas siempre es inicial o final, es decir no puede ser intermedio.

Sea n un número natural, vamos a suponer por absurdo que existe un vértice, que llamaremos A, con 2n+1 aristas que es intermedio. Luego, como es un vértice intermedio necesitamos llegar a él y salir de él para lo cual necesitamos como mínimo 2 vértices, de hecho, necesitamos 2m aristas para hacer el proceso de “entrada y salida” m veces (con m un número natural), o lo que es lo mismo necesitamos un número par de aristas.

Por lo tanto, como tenemos 2n+1 aristas nos sobrarían una arista, como A no es inicial se requiere una arista para llegar al vértice que sería la que nos sobró, ahora ya no hay más aristas. Es decir, estamos llegando a A n+1 veces y saliendo n veces, así el último tramo desde un vértice hacia A será el final del camino, causando que nuestro vértice sea final, lo cual es un absurdo ya que era por hipótesis un intermedio.

> Cómo se llegó a un absurdo nuestra suposición debe ser falsa, en conclusión, A es inicial o final.
>
> Como agregado tenemos que de hecho existe un teorema general
>
> Teorema: Si un grafo conexo tiene un camino abierto de Euler, entonces tiene exactamente dos vértices con un número impar de aristas. Por el contrario, si un grafo conexo tiene exactamente dos vértices con números de aristas impares entonces tiene un camino abierto de Euler. (Trudeau, 1994,p.554)

No se realizará la demostración del teorema, porque excede los objetivos del presente estudio.

Conclusión

Al plantear un problema, la capacidad de discriminar las características importantes de aquellas que no influyen en dicho problema, permiten pasar a uno equivalente pero mucho más simple, facilitando su resolución y además, posibilitando hallar soluciones a problemas relacionados más complejos e incluso a problemas que a priori no tenían relación con el originalmente planteado, por ejemplo el proceso aquí descrito también nos puede ayudar a saber cómo realizar un determinado trazo conformado por líneas rectas sin levantar la mano (es decir sin tocar partes anteriores del trazo mientras dibujamos).

Por otro lado, gracias a GeoGebra es posible realizar todo tipo de grafos (incluso sin saber que se está usando grafos, como al pedir la gráfica de una función cualquiera), y junto con ello variar el número de vértices y aristas, utilizar herramientas pedagógicas (grosor de línea, tipo de línea, color, etc.) para centrarnos en estudiar elementos particulares del grafo (como punto inicial, final, intermedios), facilitando su comprensión por más complicado o “extraño” resulte el grafo para el usuario. Además, por la comodidad que hay en pasar de un problema del “mundo real” (puentes de Königsberg) a uno meramente matemático (grafos). GeoGebra puede ser un muy buen primer acercamiento para un estudiante hacia lo que es, en esencia la modelización matemática.

Referencias

Euler, L. (1736). *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis.* Comment. Acad. Sci. U. Petrop 8.

Instituto de matemáticas de la UNAM. (22 de Abril de 2019). El fino arte de cruzar puentes y unir puntos.. [video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=nlTaRNW3uuc&t=539s

Leibniz, G. (8 de Septiembre de 1679). Analysis Situs.

Trudeau, R. J. (1994). *Introduction to graph theory.* Dover publications.

Valdés, J., Bueno , S., Dianez del Valle, M., & Olivenza, M. (2004). Siete puentes un camino. *Suma 45*.