Una introducción a la conjetura de Collatz usando GeoGebra

An introduction to the Collatz conjecture using GeoGebra

Collaguaso Chorlango Anderson David
Muso Tandalla Marjorie Aracely
Rubio Amaya Jhastin Alejandro

Universidad Central del Ecuador

adcollaguaso@uce.edu.ec

mamuso@uce.edu.ec

jarubio@uce.edu.ec

Resumen

La Conjetura de Collatz es uno de los problemas matemáticos más sencillos de enunciar y comprender, debido a que únicamente se emplea cálculos aritméticos estudiados desde la primaria, pero detrás de su sencillez se encuentra un problema abierto de la teoría de números, el cual grandes matemáticos han intentado demostrar sin éxito, sin embargo, se han logrado varios aportes valiosos para una mejor compresión del problema de Collatz. El objetivo de este trabajo es presentar un estudio de como el uso de GeoGebra mejora la comprensión de la Conjetura de Collatz, en los estudiantes de Nivelación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central del Ecuador, para ello se consideró dos cursos en los cuales en uno de ellos solo recibió la explicación teórica de la conjetura mientras que en el otro curso se incluyó la simulación en GeoGebra, los cuales mostraron mejores resultados en las pruebas realizadas.

Palabras Clave: Conjetura_de_Collatz, Iteración, Aritmética.

Abstract

The Collatz Conjecture is one of the simplest mathematical problems to state and understand, because only arithmetic calculations studied since elementary school are used, but behind its simplicity there is an open problem of number theory, which great mathematicians have tried to demonstrate without success, however, several valuable contributions have been made for a better understanding of the Collatz problem. The objective of this work is to present a study of how the use of GeoGebra improves the understanding of the Collatz Conjecture, in the Leveling students of the Faculty of Sciences of the Central University of Ecuador, for these two courses were considered in which in one of them he only received the theoretical explanation of the conjecture while in the other course the simulation in GeoGebra was included, which showed better results in the tests carried out.

Keywords: Collatz_Conjecture, Iteration, Arithmetic.

Introducción

Una conjetura se define como un problema dentro del campo de la Matemática para el cual aún no ha sido posible desarrollar su demostración o hallar un contraejemplo que pruebe su falsedad. Este tipo de problemas son muy comunes en las ciencias exactas y atraen a una gran cantidad de matemáticos que buscan demostrarlos o desmentirlos. A lo largo de este trabajo se va a tratar la Conjetura de Collatz, la cual a través de la función de Collatz plantea que todo número entero positivo al cabo de finitas iteraciones llega a tomar el valor de 1. Es evidente la sencillez de su enunciado, pero no tanto la complejidad del camino hacia su demostración, ya que este problema presenta un comportamiento caótico debido a que el número de iteraciones necesarias para llegar a 1 no depende del número inicial, es decir, no importa si este número es pequeño o grande no podremos saber cuántas iteraciones requiere para que tome el valor de 1.

El presente proyecto está divido en diversas secciones, primero se va a exponer el origen de la conjetura. En la segunda parte se enuncia y se revisan diversos resultados acerca de la conjetura además de estudiarse los casos para número enteros positivos y su relación con otras áreas del conocimiento. Por último, se presenta un estudio estadístico en el cual se detalla la mejoría de la comprensión de la conjetura haciendo uso de GeoGebra en estudiantes de nivelación de la UCE.

Antecedentes Históricos

Durante toda la historia de la humanidad, la matemática se ha desarrollado de manera exponencial debido al intento de resolver un sin número de problemas que iban surgiendo durante el camino. Un claro ejemplo de este tipo de problemas es la "Conjetura de Collatz" el cual recibe su nombre en honor al matemático alemán Lothar Collatz (1910-1990). Como menciona Lagarias (2010)

, Collatz durante su vida universitaria, recibió clases de grandes matemáticos tales como Hilbert, Landau y Schur, los cuales hicieron que nazca en Collatz un interés en la representación de funciones aritméticas por grafos. Arias de Reyna (2019)

manifiesta que Collatz tomaba una función y unía lo puntos $n \to m$ cuando $f(n)=m$. Rápidamente notó algo especial en estos grafos lo cual era que formaban ciclos. Collatz comenzó a buscar funciones simples que describieran estos ciclos, tomando en cuenta números que satisfagan que $f(n)<n$ y otros que $f(m)>m$, de tal forma Collatz, definió la función dada por: (Weisstein, 2022)

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \; si\ n\ es\ par \\ 3n+1 \; si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Collatz consideraba el problema de los grafos y los ciclos como mero entretenimiento. Sin embargo, para el año 1950 en la ciudad de Cambridge, presentó este problema a varios participantes, el cual fue difundido con facilidad durante un congreso de matemáticas. (Arias de Reyna, 2019)

Al ser un problema tan atractivo por su simpleza, desde años posteriores al anuncio de la conjetura, grandes matemáticos han trabajado este problema con el fin de hallar su solución sin tener éxito. Así Lagarias (2010) experto en la conjetura de Collatz menciona que es un problema verdaderamente peligroso ya que la gente se obsesiona con él y la verdad es que es imposible. No obstante, el 8 de septiembre del 2019 el matemático australiano y medalla Fiels en 2006 Terence Tao publicó en internet una prueba de que, como muy poco, la conjetura de Collatz es “casi” cierta para “casi” todos los números. El resultado dado por Terence no es una prueba completa de la conjetura, pero si es un gran avance en un problema que no rinde sus secretos fácilmente (Hartnett, 2019).

Marco Teórico

La Conjetura de Collatz, o conocido como “Problema *3x+1* ”, es un proceso aritmético para el cual se toma cualquier número entero a_0 y se desarrolla una sucesión de números enteros los cuales se rigen por las siguientes dos normas:

Si a_n es par, entonces $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

Si a_n es impar, entonces $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

Gracias a esta simple lógica se define de manera formal la función de Collatz, tal y como se menciona en Weisstein (2022), la cual es una función con dominio y rango en los números enteros positivos:

$$f_C : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$$

$$a_{n-1} \to f_C(a_{n-1}) := a_n = \begin{cases} \frac{a_{n-1}}{2} & si \quad a_{n-1} \equiv 1(mod2); \\ 3a_{n-1} + 1 & si \quad a_{n-1} \equiv 0(mod2). \end{cases}$$

Así, se puede enunciar la conjetura de Collatz de la siguiente manera:

“Para todo número entero positivo *n*, iterando la función *fc(n)* un numero finito de veces, entonces siempre se llega al número 1 y además se entra en el bucle formado por *{4,2,1}*.” (Guauque Pardo, 2021)

Notemos que en el enunciado del problema solo se considera los números enteros positivos puesto que el caso de los números enteros negativos ya está resuelto. Como se busca definir una sucesión de números a través de fc, se van a consideran las siguientes definiciones, tales como: los ‘Números Granizo’ los cuales son todos los números que forman parte de la sucesión generada para el problema de Collatz. Además, es necesario el conocimiento de la definición de órbita de un número, la cual es toda la sucesión que se forma al componer la función de Collatz hasta alcanzar el número 1. A continuación se presenta un caso específico, mismo que presenta un comportamiento muy inusual, este es el número 27, notemos que el máximo de la órbita generada por 27 es el número 9232, y además alcanza el número 1 en 112 iteraciones, como se muestra en la siguiente figura:

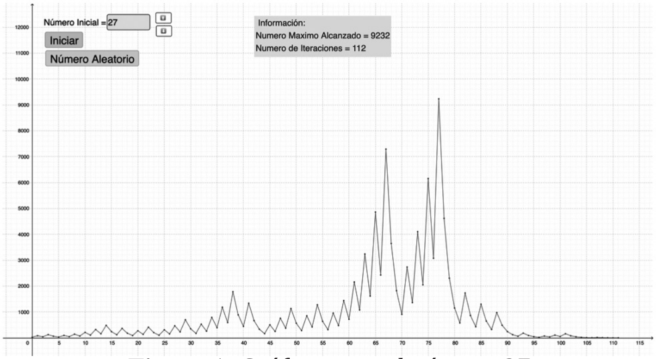

Figura 1. *Gráfica para el número 27*

Este mismo fenómeno ocurre en números tales como el 31, 41, 47 para los cuales el número de iteraciones se dispara al igual que el máximo de la órbita. Estos destalles se presentan en la siguiente gráfica, la cual en el eje X es el número n par al cual se va a calcular su órbita y en el eje Y, se muestra el número de pasos necesarios para llegar a 1:

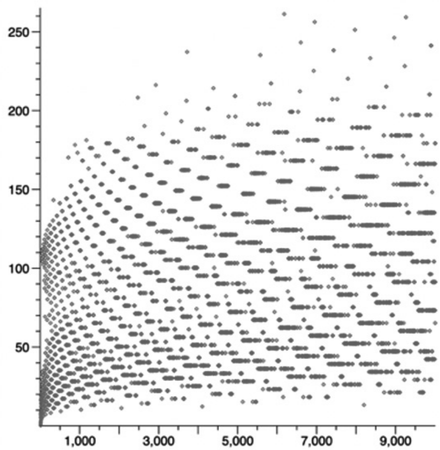

Figura 2. *Número de iteraciones dado del 1 al 10000*
Fuente: (Weisstein, 2022)

Existen ciertos números que presentan un comportamiento muy estable y para el cual el número de iteraciones es mínimo. Uno de ellos es el número 16384, el cual solo necesita 15 iteraciones. Los números que cumplen esta característica son todos aquellos que se pueden escribir como 2^k, $k \in \mathbb{N}$, ya que al ser introducido en la función de Collatz siempre va a tomar el lado par y se tiene que $fc(2^k) = 2^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, lo cual muestra que siempre va a ser un número par y por tanto la gráfica es estrictamente decreciente como se muestra en el siguiente gráfico:

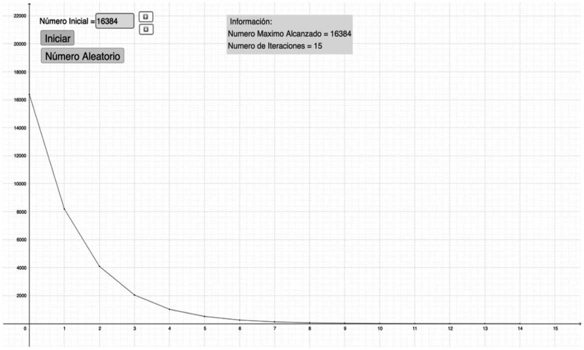

Figura 3. *Gráfica para el número 16 384*

Para poder comprender la relación entre la Conjetura de Collatz y diversas áreas de la matemática se tomó como referencia las investigación realizadas por el matemático australiano Terence Tao, en el cual se detallan las conexiones de la conjetura de Collatz con distintos campos, así, Candela (2020)

menciona que: el trabajo de Tao es interesante tanto por las conexiones que establece entre el problema y el área de Ecuaciones Diferenciales Parciales, dando así una nueva muestra de las sorprendentes ramificaciones de la Conjetura de Collatz. Esta riqueza es uno de los aspectos más atractivos del problema: se conoce relaciones entre la conjetura y varias áreas matemáticas además de la teoría de los números, como la teoría computacional, la combinatoria y la teoría de los sistemas dinámicos. Se encuentra relacionado con: La teoría de los números debido a que este problema involucra la suma y el producto por lo cual es un problema de aritmética. Se relaciona con los sistemas dinámicos ya que en este campo se hace se analiza el comportamiento de las funciones, puesto que el problema 3x+1 se iterará una función, por tanto, es un sistema dinámico discreto en el espacio Z, y además la operación más importante para la iteración es la composición. Por otro lado, la conexión con la teoría ergódica surge a favor de los sistemas dinámicos, sin embargo, al presentar una medida invariante, permite que la teoría ergódica y la Conjetura de Collatz se relacionen (Guauque Pardo, 2021).

Análisis Estadísticos

Para cumplir el objetivo de este trabajo, se realizó un análisis estadístico para evidenciar que el uso de GeoGebra favorece el aprendizaje tanto para problemas simples como para conjeturas importantes dentro de la matemática. Para ello se ha seleccionado una metodología de enseñanza basada en el método heurístico, es decir, cada alumno desarrolla los conocimientos de manera independiente a través de simples explicaciones teóricas. El estudio se realizó a los estudiantes de Nivelación de la Carrera de Matemática de la Universidad Centrar del Ecuador. Para ello, se tomó dos paralelos independientes, en el Curso A (Primer Paralelo) se realizó una explicación meramente teórica de la Conjetura de Collatz en la cual se detallaban definiciones y resultados importantes. En el Curso B (Segundo Paralelo) se dio una explicación teórica al mismo nivel y con los mismos temas tratados en el Curso A y además se añadió una presentación gráfica del comportamiento de la función de Collatz, simulada en GeoGebra. Al finalizar la presentación, en ambos cursos se realizó una prueba para poner observar los conocimientos aprendidos durante la explicación y de esta manera poder comparar los resultados entre ambos cursos. La prueba constaba de 6 preguntas relacionadas al comportamiento de la función de Collatz, a continuación, se presentan los resultados del porcentaje de aciertos por cada curso y en cada pregunta:

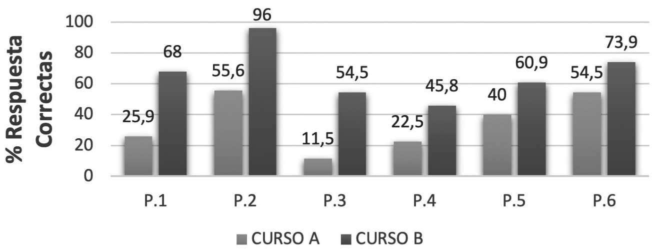

Figura 4. *Respuestas correctas del cuestionario de la Conjetura de Collatz.*

Es evidente la diferencia entre aquellos alumnos que recibieron solo formación teórica con los que recibieron la parte gráfica ya que el porcentaje de aciertos es significativamente más alto en el Curso B que en el Curso A, dándonos las primeras observaciones en las cuales se muestra que la ayuda visual de los problemas nos permite mejorar la comprensión de estos. También se presenta la gráfica complementaria a la anterior, en la cual se detalla el porcentaje errores obtenidos en cada pregunta, con la finalidad de contrastar la información adquirida:

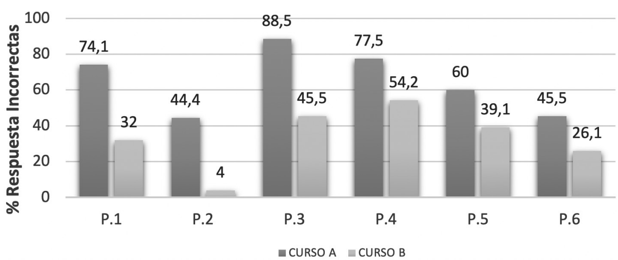

Figura 5. *Respuestas incorrectas del cuestionario de la Conjetura de Collatz*

Notemos que el porcentaje de error es mucho mayor en el Curso A en especial en las preguntas las cuales estaban relacionadas con ideas gráficas de la función de Collatz. Así, se evidencia que el aprendizaje visual ayuda a mejorar el desempeño académico de los estudiantes en especial en problemas matemáticos ya que aún no se tiene la madurez matemática necesaria para poder comprender los problemas solo con teoría.

Además, dentro de la prueba del Curso B se incluyó una pregunta personal referente a cuanto consideraban que ha influenciado la presentación en GeoGebra para la mejor comprensión de la Conjetura de Collatz la cual nos arrojó los siguientes resultados:

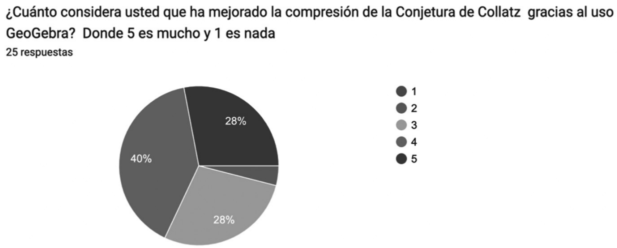

Figura 6. *Estadística ante el uso de GeoGebra*

De la gráfica anterior, se observa que un 68% de los alumnos del Curso B, atribuyeron que el uso de GeoGebra aumenta la capacidad de abstracción ante problemas matemáticos que no son sencillos de entender. De esta manera, al igual que con los datos anteriores se puede corroborar que el apoyo didáctico basado en la visualización contribuye de manera notoria en la educación.

Conclusiones y Recomendaciones

Los datos obtenidos a lo largo de este trabajo nos permiten concluir que el apoyo de las aplicaciones tecnológicas, en este caso específico de GeoGebra, contribuyen al aprendizaje de los estudiantes en las aulas debido a que se puede observar cómo se va desarrollando el problema matemático de forma que los estudiantes puedan manipular y trabajar de forma didáctica. Se recomienda especialmente a los profesores de la asignatura de matemática, revisar e interactuar con el sin número de opciones disponibles dentro de la aplicación de GeoGebra, incluyendo la programación la cual permite una expansión de las herramientas del programa.

Referencias

Oliviera e Silva, T. (1999). Maximin Excursion and stopping time record-holders for the 3x+1 problem: Computational results. *American Mathematical Society*, 371-384.

Arias de Reyna, J. (domingo de Semtiembre de 2019). *imus*. Obtenido de El blog del instituto de matemáticas de la Universidad de Sevilla: https://institucional.us.es/blogimus/2019/11/el-problema-de-collatz/Lagarias, J. C. (2010). *The 3x + 1 Problem: An Overview.* Michigan.

Chamberland, M. (1998). An Update on the 3x+1 Problem. *Number theory and dyminical systtem*.

Hartnett, K. (18 de Diciembre de 2019). *Investigación y Ciencia*. Obtenido de https://www.investigacionyciencia.es/noticias/un-gran-resultado-matemtico-para-un-problema-peligroso-18125

Weisstein, E. W. (24 de Junio de 2022). *MathWorld*. Obtenido de Wolfram Web Resource: https://www.investigacionyciencia.es/noticias/un-gran-resultado-matemtico-para-un-problema-peligroso-18125

Guauque Pardo, A. M. (2021). *Sobre la conjetura de Collatz.* Bogotá DC.

Candela, P. (9 de Enero de 2020). Obtenido de El país: https://elpais.com/elpais/2020/01/08/ciencia/1578499346_232520.html